Секция 2. ГЕОМЕТРИЯ И АНАЛИЗ

О сигнатуре оператора одномерной кривизны

Д.С. Воронов, О.П. Гладунова
АлтГПА, АлтГУ, г. Барнаул

Пусть ∇ − связность Леви-Чивита римановой метрики $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ на многообразии M^n, R_{ij} − тензор Риччи, R − скалярная кривизна метрики ds^2.

Под сигнатурой симметрического оператора A, действующего на n-мерном евклидовом пространстве, будем понимать упорядоченный набор

$$(\mathrm{sgn}(\lambda_1), \mathrm{sgn}(\lambda_2), \ldots, \mathrm{sgn}(\lambda_n)),$$

где $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$ − собственные значения оператора A, и $\mathrm{sgn}(x)$ означает знак (вещественного) числа x.

При исследовании римановых многообразий важную роль играет тензор одномерной кривизны A_{ij}. Он представляет собой целую часть от деления риманова тензора кривизны на метрический тензор относительно произведения Кулкарни-Номидзу [1] и определяется формулой

$$A_{ij} = \frac{1}{n-1}\left(R_{ij} - \frac{Rg_{ij}}{2(n-1)}\right).$$

В данной работе обобщены и уточнены результаты, полученные в [2], классифицированы возможные сигнатуры оператора одномерной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

Занумеруем все возможные сигнатуры для трехмерного случая так, как это указано в таблице 1.

Таблица 1

№	1	2	3	4	5
Сигнатура	(−,−,−)	(−,−,0)	(−,−,+)	(−,0,0)	(−,0,+)
№	6	7	8	9	10
Сигнатура	(−,+,+)	(0,0,0)	(0,0,+)	(0,+,+)	(+,+,+)

Теорема 1. *Пусть G – унимодулярная трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G, s – произвольная сигнатура из таблицы 1. Тогда s реализуется в качестве сигнатуры оператора одномерной кривизны для некоторого скалярного произведения на $\mathfrak{g}$ в*

том и только том случае, если в таблице 2 на пересечении строки, соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и столбца, соответствующего сигнатуре s, находится знак «+».

Таблица 2

	№ сигнатуры									
Алгебра Ли	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$su(2)$	–	–	+	–	+	+	–	+	+	+
$sl(2, \mathrm{R})$	–	–	+	–	+	+	–	–	–	–
e(2)	–	–	+	–	–	–	+	–	–	–
$e(1, 1)$	–	–	+	–	+	+	–	–	–	–
h	–	–	+	–	–	–	–	–	–	–
R^3	–	–	–	–	–	–	+	–	–	–

Теорема 2. *Пусть G – неунимодулярная трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G. Тогда на $\mathfrak{g}$ реализуемы только сигнатуры 1, 2, 3, 5 и 6 из таблицы 1.*

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (№ 08-01-98001), Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ РФ (№ НШ-5682.2008.1), а также при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (№ 02.740.11.0457).

Библиографический список

1. Бессе А. Многообразия Эйнштейна: В 2 т. Пер. с англ. – М.: Мир, 1990.

2. Rodionov E.D., Slavskii V.V. Curvature estimations of left invariant Riemannian metrics on three dimensional Lie groups // Differential Geometry and Application. Proceeding of the 7th International Conference (Brno, August 10 − 14, 1998), Masaryk University, Brno, Czech Republic. − 1999. − P.111-126.

Нелинейные методы визуализации многомерных данных

А.С. Герасимова

АлтГУ, г. Барнаул

Рассмотрим задачу визуализации многомерных данных. Суть проблемы заключается в замене многомерных точек-объектов на объекты двумерные с учетом минимального искажения геометрической структуры облака данных.