Для сравнения деформирования материала заданного объема в каналах различной формы используется представление каналов в виде равновеликих фигур.

Поля напряжений, полученные при численном решении ряда задач, позволяют анализировать влияние основных параметров выбранных математических моделей материала и особенностей конфигураций каналов на напряженно-деформированное состояние и давление материала на стенки.

О конечно-элементном моделировании напряженного состояния в окрестности отверстий

О.П. Бушманова, А.В. Толстопятова
АлтГУ, г. Барнаул

Представлено исследование напряженно-деформированного состояния упруго-пластических материалов в окрестности отверстий различной формы.

Для численного моделирования деформирования в плоской постановке используется метод конечных элементов.

В рамках программного комплекса конечно-элементных расчетов Abaqus Student Edition получены решения ряда задач с использованием различных математических моделей упруго-пластического поведения материалов.

Проведен сравнительный анализ влияния основных параметров рассматриваемых задач на напряженно-деформированное состояние в окрестности отверстий.

Эффективное уравнение турбулентной диффузии в трещиновато-пористой среде

А.В. Зубкова[1], С.А. Саженков[2]
[1]*Новосибирский государственный университет*
[2]*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск*

В пространственно-временном цилиндре $Q_T := \Omega \times (0,T)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область, $T = const > 0$, рассматривается линейное параболическое уравнение

$$u_t^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} div_x(\vec{a}^\varepsilon u^\varepsilon) = D_0 \Delta_x u^\varepsilon, \qquad (1)$$

в котором $\vec{a}^{\varepsilon} = \vec{a}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon^2}\right)$, где $\vec{a}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ – это заданная гладкая вектор-функция, 1-периодическая по $\vec{y}$ и $\vec{z}$, соленоидальная, то есть $div_x\vec{a} = div_y\vec{a} = div_z\vec{a} = 0$. Среднее значение $\vec{a}$ на периоде $\mathbb{Z} = (0,1)^3$ равно нулю. $div_x(\vec{a}^{\varepsilon}u^{\varepsilon})$ – это постоянный положительный коэффициент, ε – малый положительный параметр. Уравнение (1) снабжается начальными данными и граничным условием следующего вида:

$$u^{\varepsilon}\big|_{t=0} = u^0(\vec{x}),\ 0 \le u^0 \le 1 \text{ почти всюду в } \Omega,\ u^0 \in L^{\infty}(\Omega),\ u^{\varepsilon}\big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

В механике сплошных сред $\vec{a}$ имеет смысл вектора скорости, константа D_0 – коэффициента молекулярной диффузии, u^{ε} – плотности или концентрации переносимого вещества. Уравнение (1) описывает баланс массы жидкости, фильтрующейся через трещиновато-пористый скелет. Переменные в вектор-функции $\vec{a}^{\varepsilon}$, имеющие порядок $O(\varepsilon^{-2})$, являются переменными микроскопического уровня, на котором происходят процессы массообмена жидкости и пор, а имеющие порядок $O(\varepsilon^{-1})$ – переменными мезоскопического уровня, на котором происходят процессы массообмена жидкости и трещин.

В силу известной теории уравнений в частных производных, при произвольном фиксированном $\varepsilon > 0$ задача (1)–(2) имеет единственное сильное обобщенное решение.

Изучено предельное поведение модели (1)–(2), возникающее при $\varepsilon \searrow 0$. Установлено, что $u^* = w - \lim_{\varepsilon \searrow 0} u^{\varepsilon}$ (предел здесь понимается в слабом смысле) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} + div_x(\vec{a}^* u^*) - D_0\Delta_x u^* + \sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{A}^{ij} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_i \partial x_j} = 0. \quad (3)$$

Здесь $\vec{a}^* = \left(\langle a_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\rangle_{\mathbb{Y}\times\mathbb{Z}}\right)_{k=1,2,3}$ – эффективное поле скоростей, $\mathbb{A} = \left(\langle a_i U_j\rangle_{\mathbb{Y}\times\mathbb{Z}}\right)_{i,j=1,2,3}$ – тензор турбулентной диффузии. Тензор полной (турбулентно-молекулярной) диффузии $\left(D_0\delta_{ij} - \langle a_i U_j\rangle_{\mathbb{Y}\times\mathbb{Z}}\right)_{i,j=1,2,3}$ является строго положительно определенным.

Формальный вывод уравнения (3) получен методом повторной гомогенизации (в англ. оригинале: reiterated homogenization) аналогично рассмотрению в [1]. Строгое обоснование процедуры гомогенизации получено методом трехмасштабной сходимости Аллера–Бриана [2]. Вектор $\vec{U}$, возникающий в коэффициентах в уравнении (3), является решением задачи на ячейке, то есть точно вычисляется из микроструктуры трещиновато-пористой среды.

Библиографический список

1. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures, Amsterdam, North-Holland, 1978.

2. Allaire G., Briane M. Multiscale convergence and reiterated homogenization // Proc. R. Soc. Edinb., 1996, 126A, 297-342.

Численный расчет течений вязкой несжимаемой жидкости со свободной границей

А.С. Кузиков

Алтайский филиал РАНХиГС, г. Барнаул

В работе предлагается метод численного расчета двумерного установившегося течения, описываемого уравнениями Навье-Стокса.

Граница области течения D есть $\partial D = \Gamma \cup S$, где $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $\Gamma_1 = \{x = -1,\ 0 \le y \le y_1\}$, $\Gamma_2 = \{x = 1,\ 0 \le y \le y_2\}$, $\Gamma_3 = \{y = f(x),\ -1 \le x \le 1,\ f(-1) = f(1) = 0\}$, где f(x) – заданная непрерывная функция, $S = \{y = g(x),\ -1 \le x \le 1,\ g(-1) = y_1,\ g(1) = y_2\}$, причем $y=g(x)$ – неизвестная до решения свободная граница.

На известном участке границы Г задается вектор скорости $u = (u_1, u_2) = h(x)$, а на свободной границе S ставится кинематическое условие $u_n = u \cdot n = 0$, где n – единичный вектор внешней нормали и динамическое условие в виде равного нулю вектора напряжений. Считаем, что $\int\limits_{\Gamma} h_n ds = 0$.

Задача решается градиентным методом как задача управления посредством минимизации функционала $J = \int\limits_{D} (div\, u)^2 dD + \int\limits_{S} u_n^2 ds$, где управлениями являются $p(x, y)$ – давление и искомая функция $g(x)$.

Градиент функционала находится с помощью решения сопряженной системы для уравнений движения. Для удобства на каждой итерации приближение области течения посредством конформного отображения преобразуется в заданный прямоугольник, в котором строится