Это говорит о том, что смоделированные погодные сценарии могут успешно применяться для текущего планирования и перспективного прогнозирования урожайности зерновых культур.

Модель нестационарного диффузионного переноса примесей в задачах экологического состояния атмосферы

Л.А. Хворова, Е.В. Резанова
АлтГУ, г. Барнаул

В докладе рассматривается применение вычислительных моделей и эффективных алгоритмов на основе метода покоординатного расщепления для решения задач прогноза переноса и рассеяния загрязнений на основе оперативной метеорологической информации.

Математические модели, связанные с описанием явления диффузного переноса загрязнений в пределах пограничного слоя атмосферы, основаны на нестационарных трехмерных уравнениях параболического типа.

Пусть $P=P(x,y,z)$ – точка в пространстве, $P\in\Omega\subset R^3$, $q(P,t)$ – концентрация примесей в точке пространства P в момент времени t, $t\in[0,T]$.

Тогда уравнение переноса субстанции в турбулентной среде в области Ω можно записать в виде:

$$\frac{\partial q(P,t)}{\partial t}+\alpha(t)\cdot q(P,t)+\frac{\partial}{\partial x}\big(V_x(P,t)\cdot q(P,t)\big)+\frac{\partial}{\partial y}\big(V_y(P,t)\cdot q(P,t)\big)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\big(V_z(P,t)\cdot q(P,t)\big)-\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x(P,t)\cdot\frac{\partial q(P,t)}{\partial x}\right)- \qquad (1)$$
$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y(P,t)\cdot\frac{\partial q(P,t)}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z(P,t)\cdot\frac{\partial q(P,t)}{\partial z}\right)=S(P,t)$$

где $V_x(P,t)$, $V_y(P,t)$, $V_z(P,t)$ – компоненты вектора скорости ветра; α(t) – коэффициент, характеризующий степень вывода или привнесения примесей в данный объем за счет химических или других процессов, протекающих в приземном слое атмосферы; $K_x(P,t)$, $K_y(P,t)$, $K_z(P,t)$ – турбулентность, характеризуемая коэффициентом турбулентной диффузии. Перенос осуществляется вдоль координатных осей $\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Oy},\overrightarrow{Oz}$; $S(P,t)$ – источник примесей.

Искомая функция $q(P,t)$ удовлетворяет начальным условиям:

$$q(P,t)|_{t=0} = q(P,0) = q_0(P) \text{ для } P \in \Omega; \qquad (2)$$

и граничным условиям:

$$q(P,t) = \overline{q}(P,t) \text{ для } P \in \overline{\Omega}, \qquad (3)$$

Считается, что $q(P,0)=q_0(P)$ и $\overline{q}(P,t)$ – заданные функции, а $\overline{\Omega}$ – граница области Ω [1].

Задачу для нестационарной модели (1)–(3) представим в виде трех последовательно решаемых подзадач, соответствующих переносу субстанции вдоль координатных осей $\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}$ в пределах элементарного временного интервала $t \in [t_j, t_{j+1}]$, $j = \overline{0,N}$. Данное представление лежит в основе метода покоординатного расщепления [2].

На данном этапе исследования рассматривается нестационарное уравнение переноса примесей для одной пространственной переменной x:

$$\frac{\partial}{\partial t} q(x,t) + \alpha(t) \cdot q(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(V(x,t) \cdot q(x,t)\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(K(x,t) \cdot \frac{\partial q(x,t)}{\partial x}\right) = S(x,t), \quad (4)$$

$$\begin{gathered} q(x,t_0) = q_0(x), \quad q(x_0,t) = \overline{q}_0(t), \quad q(X,t) = \overline{q}_X(t), \\ t \in [t_0, T], \quad x \in [x_0, X]. \end{gathered} \qquad (5)$$

Неопределенность исходной задачи требует построения соответствующей адекватной параметризованной модели данного физического явления с последующей оптимизацией получаемого в рамках этой модели результата.

Задаче (4)–(5) соответствует параметризованное уравнение вида:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \hat{q}(\hat{x},\hat{t}) + \hat{\alpha}(\hat{t}) \cdot \hat{q}(\hat{x},\hat{t}) + \beta \frac{\partial}{\partial \hat{x}}\left(\hat{V}(\hat{x},\hat{t}) \cdot \hat{q}(\hat{x},\hat{t})\right) - \\ -\gamma \frac{\partial}{\partial \hat{x}}\left(\hat{K}(\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial \hat{q}(\hat{x},\hat{t})}{\partial \hat{x}}\right) = \xi \cdot \hat{S}(\hat{x},\hat{t}), \end{gathered} \qquad (6)$$

$$\hat{q}(\hat{x},0) = \hat{q}_0(\hat{x}), \quad \hat{q}(0,\hat{t}) = \overline{q}_1(\hat{t}), \quad \hat{q}(1,\hat{t}) = \overline{q}_2(\hat{t}), \quad \hat{t} \in [0,1], \qquad (6а)$$

$$\hat{q}(\hat{x},\hat{t}) \in [0,1], \quad \hat{V}(\hat{x},\hat{t}) \in [0,1], \quad \hat{K}(\hat{x},\hat{t}) \in [0,1], \quad \hat{S}(\hat{x},\hat{t}) \in [0,1], \qquad (6б)$$

в котором нормировочные коэффициенты вычисляются по формуле (7):

$$\hat{\alpha}(\hat{t}) = T \cdot \alpha(\hat{t}), \quad \beta = \left(V^* T\right)/X, \quad \gamma = \left(K^* T\right)/X^2, \quad \xi = \left(S^* T\right)/q^*, \qquad (7)$$

где $V^*=V_{max}$, $K^*=K_{max}$.

Выражения (7) формально вводят четыре безразмерных параметра α, β, γ, ξ. Если заданы начальные и граничные условия для $\hat{q}\left(\hat{x},\hat{t}\right)$ на $\hat{\Omega}=\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]$ и фиксированы значения α, β, γ, ξ, то решение (6) следует рассматривать как функцию этих параметров, т.е. $\hat{q}\left(\hat{x},\hat{t},\alpha,\beta,\gamma,\xi\right)$. Если $V^{*}=V_{max}$ и $K^{*}=K_{max}$ определены однозначно, то параметры β и γ определяют границы X и T области Ω с помощью выражений

$$X=\left(K^{*}\cdot\beta\right)/\left(V^{*}\cdot\gamma\right),\quad T=\left(K^{*}\cdot\beta^{2}\right)/\left(\left(V^{*}\right)^{2}\cdot\gamma\right).. \qquad (8)$$

В силу (8) можно утверждать, что решение $\hat{q}\left(\hat{x},\hat{t},\alpha,\beta,\gamma,\xi\right)$ соответствует множеству ситуаций, каждая из которых определяется набором (V^{*}, K^{*}, α, β, γ, ξ) и решение (6) соответствует подмножеству множества возможных решений (4). В этом случае при построении решающего алгоритма параметрической модели (6) переноса примесей в пограничном слое атмосферы целесообразно включать в нее процедуры оптимизации параметров на основе принципа минимакса [1].

Реализация алгоритма решения тестовой задачи переноса примесей осуществлена в пакете Matlab.

Исходными значениями величин для тестовых расчетов послужили данные из литературных источников.

Вычисления проводились при следующих значениях исходных данных: $X=350$ *м*, $T=600$ *с*, $V_0=15$ *м/с*, $K_0=40$ *м²/с*, $a_0=0{,}25$ *(1/с)*, $q_0=0.05*10^{-6}$ *(кг/м³)*. Эти значения соответствуют следующим условиям состояния атмосферы: нейтральная стратификация, высота $H=300$ *м*, тяжелая примесь, состояние погоды – «ясно» [1].

Результаты расчетов приведены в виде массивов. Массив q_T – точное решение задачи; массив $q^{(1)}$ получен в результате расчетов, проводимых по явной разностной схеме сеточной модели; массив $q^{(2)}$ получен в результате расчетов, проводимых по неявной разностной схеме сеточной модели. На рисунке 1 показаны графики функций q_T, $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$ для фиксированного момента времени $\hat{t}=0.5$.

По изложенному алгоритму решается задача переноса субстанции, которая может быть использована для прогнозирования экологического состояния атмосферы.

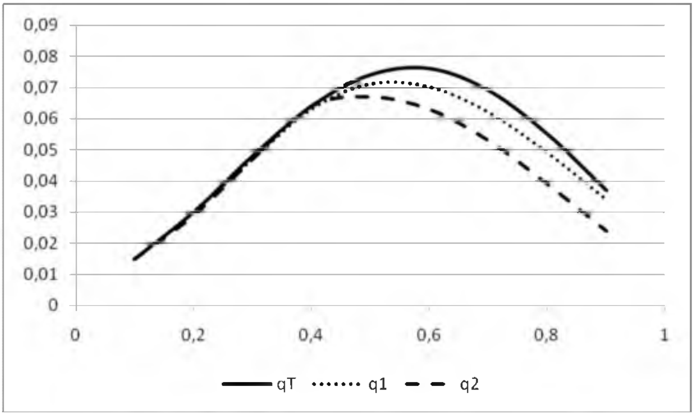

Рис. 1. Графики функций концентрации примесей
для фиксированного момента времени $\hat{t} = 0.5$

Библиографический список

1 Наац В.И. Вычислительные методы и модели нестационарного диффузного переноса примесей в задачах контроля и прогноза экологического состояния атмосферы. – Севастополь, 2005.

2. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982.