Каждому правилу вывода исчисления L_4 в базисе $\mathscr{C}$ соответствует так называемый *основной автомат*, непосредственно моделирующий это правило. Остальные автоматы выполняют некоторые вспомогательные действия. Специальным образом определяются правильно организованные логические сети над $\mathscr{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Сложностью* правильно организованной логической сети K называется число основных автоматов, входящих в эту сеть, обозначение: $h(K)$.

ТЕОРЕМА. *Пусть S_m – множество операторов, реализуемых правильно организованными сетями, имеющими сложность $h(K) \le m$. Тогда для любого m S_m является алгоритмически разрешимым.*

Доказано также, что рассматриваемые логические сети реализуют любые примитивно рекурсивные операторы.

Библиографический список

1. Ганов В.А., Дегтерева Р.В. Алгоритмические проблемы конечных автоматов.– Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2014.
2. Марков А.А. Теория алгоритмов // Труды матем. ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова. – М.-Л.; Изд-во АН СССР, 1954. – Т. 42.
3. Кратко М.И. О существовании нерекурсивных базисов конечных автоматов // Алгебра и логика. – 1964. – Т.3, №2. –С. 33-44.

УДК 512.55

О классификации некоторых классов конечных коммутативных локальных колец

Е.В. Журавлев

АлтГУ, г. Барнаул

Пусть R – коммутативное локальное кольцо характеристики p = 2, $J = J(R)$ – радикал Джекобсона кольца R, $R/J(R) = GF(p^r) = F$ – конечное поле и

$$J^4 = 0,\ \dim_F J/J^2 = 2,\ \dim_F J^2/J^3 = 2,\ \dim_F J^3 = 1.$$

Тогда $R = F \oplus Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fw$ и $J = Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fw$, где $\{u_1, u_2, v_1, v_2, w\}$ – отмеченный базис идеала J над полем F (подробнее см. [1]), причем $u_1, u_2 \in J/J^2$, $v_1, v_2 \in J^2/J^3$, $w \in J^3$. Так как $u_iu_j \in J^2$, и $u_iv_j, v_ju_i \in J^3$, то

$$u_iu_j = a_{ij}^1 v_1 + a_{ij}^2 v_1 + b_{ij} w \text{ и } u_iv_j = c_{ij}w,\ v_ju_i = d_{ij}w$$

для некоторых $a^1_{ij},\ a^2_{ij},\ b_{ij},\ c_{ij},\ d_{ij} \in F, i,j = \overline{1,2}$.

Рассмотрим матрицы умножения: $A_1 = (a^1_{ij})$, $A_2 = \left(a^2_{ij}\right)$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ и $D = (d_{ij})$, $i,j = \overline{1,2}$. Так как R – коммутативное кольцо, то $C = D$, а матрицы A_1, A_2, B являются симметрическими.
Пусть $\delta \in F$, $\forall x \in F\ \delta \neq x + x^2$, и $\mu = a^2c + ac^2 + c^3(1+\delta)$, $\eta = a^3 + ac^2\delta + c^3\delta$,
$M = \{z \in F \mid \forall s \in \{0, 1\}\ \forall a, c \in F,\ a \neq 0$ или $c \neq 0,\ (\eta(1 + s) + \mu\delta)z + \eta \neq 0\}$.

Рассмотрим множество функций $\varphi_{s,a,c}: M \to F$

$$\varphi_{s,a,c}(z) = \frac{(\eta + \mu s)z + \mu}{(\eta(1+s) + \mu\delta)z + \eta},$$

где $s \in \{0, 1\}$, $a, c \in F$, $a \neq 0$ или $c \neq 0$. Относительно бинарной операции $(\phi_1 \bullet \phi_2)(z) = \phi_1(\phi_2(z))$ $(\phi_1, \phi_2 \in K)$ это множество образует группу, которая действует на множестве M. Пусть $K\backslash M$ – множество представителей орбит. Пусть также z_0 – такой фиксированный элемент поля F, что $z_0 + 1 \notin F^{*3}$.

Все попарно неизоморфные кольца, описанные выше, определяются следующими пятерками матриц:

$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta & 0 \end{pmatrix};$

$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = D = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1 + \delta z & 1 \end{pmatrix},$
$z \in K\backslash M;$

$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = D = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$

где $z = 0$ или $z = 1$ или $z = z_0$.

Библиографический список

1. Журавлев Е.В. Локальные кольца порядка p^6 с 4-нильпотентным радикалом Джекобсона // Сибирские электронные математические известия. [Электронный ресурс]. (2006), №3. Режим доступа: http://semr.math.nsc.ru.

2. Corbas B., Williams G.D. Congruence of two-dimensional subspaces in (characteristic 2) // Pacific Journal mathematics. – 1999. – V. 188, №2. – P. 237-249.

УДК 512.57

Квазимногообразия 2-ступенно нильпотентных групп аксиоматического ранга 5 экспоненты 3

Д.В. Ильина
АлтГУ, г. Барнаул

Квазитождество вида $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(t_1(x_1,\dots,x_n)=1)\to(t_2(x_1,\dots,x_n)=1)$, где t_1, t_2 – групповые слова в алфавите $x_1,\dots,x_n$, называется полутождеством. Квазимногообразие групп, которое можно задать некоторой системой полутождеств, называется полумногообразием.

В [1] (см. также [2, с. 67-70]) была выявлена тесная связь между полумногообразиями и группами с одним определяющим соотношением, что позволило использовать глубокие результаты теории групп при исследовании полумногообразий. В частности, в [3] доказано, что квазимногообразие, порожденное всеми собственными полумногообразиями групп, не совпадает с классом всех групп.

Известно [4], что всякое квазимногообразие абелевых групп является полумногообразием. В [2, с. 149-150] установлено, что всякое полумногообразие, содержащиеся в многообразии, заданном тождествами $(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x,y,z]=1)$, $(\forall x)(x^p=1)$, где p – простое число и $p\neq 2$, является многообразием. Кроме того, в [5] показано, что каждое собственное полумногообразие в классе нильпотентных групп без кручения ступени не выше 2 содержит лишь абелевы группы [2, с. 150]. С теорией квазимногообразий можно ознакомиться в [6].
Следующий шаг изучения квазитождеств – это исследования 2-квазитождеств. 2-квазитождество – это формула вида

$(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(t_1(x_1,\dots,x_n)=1)\&(t_2(x_1,\dots,x_n)=1)\to(t_3(x_1,\dots,x_n)=1)$, где $t_1(x_1,\dots,x_n)$, $t_2(x_1,\dots,x_n)$, $t_3(x_1,\dots,x_n)$ – групповые словав алфавите $x_1,\dots,x_n$. Квазимногообразие, заданное системой 2-квазитождеств, называется 2-квазимногообразием. Заметим, что многообразия и полумногообразия – это частный случай 2-квазимногообразий.