2. Будкин А.И. Аксиоматический ранг квазимногообразия, содержащего свободную разрешимую группу // Матем. сб. – 1980. – Т. 112, №4. – С. 647-655.

3. Будкин А.И. Аксиоматический ранг квазимногообразия правоупорядочиваемых групп // Алгебра и логика. – 1986. – Т. 25, №5. – С. 499-507.

4. Половникова Е.С. Об аксиоматическом ранге квазимногообразий // Сиб. матем. ж. – 1999. – Т.40, №1. – С. 167-176.

УДК 512.57

Об одном многообразии Леви экспоненты 2p

В.В. Лодейщикова

АлтГТУ им. И.И. Ползунова, г. Барнаул

Для некоторого класса групп M обозначим через $L(M)$ класс всех групп G, в которых нормальное замыкание $(x)^G$ любого элемента x из G принадлежит M. Класс $L(M)$ групп будем называть классом Леви, порожденным M. Классы Леви были введены в работе Л.К. Каппе [1] под влиянием работы Ф. Леви [2], в которой дана классификация групп с абелевыми нормальными замыканиями вида $(x)^G$. Р.Ф. Морсом [3] доказано, что если M – многообразие групп, то $L(M)$ также многообразие групп. Из работы А.И. Будкина [4] следует, что если M – квазимногообразие групп, то $L(M)$ также является квазимногообразием групп.

Как обычно, $varK$ – многообразие, порождённое классом групп K, qK – квазимногообразие, порождённое классом групп. Обозначим через N_c многообразие нильпотентных групп ступени не выше c, через $F_n(M)$ свободную группу ранга n в квазимногообразии M, через $Syl_p(G)$ – некоторую силовскую p-подгруппу группы G.

А.И. Будкин [4] доказал, что если K – произвольное множество нильпотентных групп ступени 2 без элементов порядков 2 и 5, и в каждой группе из K централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, является абелевой подгруппой, то $L(qK)$ содержится в N_3. В действительности, в доказательстве этого результата отсутствие элементов порядка 5 нужно было только для установления того, что всякая 3-порожденная группа из $L(qK)$ нильпотентна класса не выше 4, поэтому в работе А.И. Будкина и Л.В. Тараниной [5] данный результат был усилен и доказана аналогичная теорема для произвольного множества нильпотентных групп ступени 2 без элементов порядка 2.

А.И. Будкиным [6], доказано, что если M – нильиотентное квазимногообразие, $\overline{M}$ – множество всех конечно-порождённых групп из M, то выполняется равенство $L(q\overline{M}) = qL(\overline{M})$. Там же установлено, что если N – класс всех конечно-порождённых нильпотентных групп, N_0 – класс всех конечно-порождённых нильпотентных групп без кручения, то аналогичное утверждение неверно, и справедливы строгие включения $qN_0 \subset L(qN_0)$ и $qN \subset L(qN)$, откуда, в частности, следуют неравенства $L(qN_0) \neq qL(N_0)$ и $L(qN) \neq qL(N)$.

В работе А.И. Будкина [6] также показано, что квазимногообразия $L(qN)$, $L(qN_0)$ замкнуты относительно свободных произведений, каждое из этих квазимногообразий содержит не более одного максимального собственного подквазимногообразия и что если квазимногообразие M замкнуто относительно свободных произведений, то таковым же является квазимногообразие $L(M)$. Рассмотрим группы, имеющие следующие представления в N_2:

$$H_p = gr(x, y \mid [x, y]^p = 1),\ \ H_{p^s} = gr(x, y \mid [x, y]^p = x^{p^s} = y^{p^s} = 1),$$

где s – натуральное число, p – простое число.

Набор qH_{p^s} (исключая qH_{2^1}), qH_p, $qF_2(N_2)$ (p – простое число), представляет собой полный список почти абелевых квазимногообразий нильпотентных групп (т. е. неабелевых квазимногообразий нильпотентных групп, все собственные подквазимногообразия которых абелевы). В работах [7-9] найдены описания классов Леви, порожденных почти абелевыми квазимногообразиями нильпотентных групп (исключая $L(qH_2)$).

В [9] доказано, что если K – произвольный класс нильпотентных ступени не выше 2 групп экспоненты 2^n (n – фиксированное натуральное число, $n \geq 2$) с коммутантами экспоненты 2 и в каждой группе из K элементы порядка 2^m $(0<m<n)$ содержатся в центре этой группы, то класс Леви, порождённый квазимногообразием qK, совпадает с многообразием нильпотентных ступени не выше 2 групп экспоненты 2^n.

Также в [9] было доказано существование класса K такого, что K – класс нильпотентных ступени не выше 2 групп экспоненты 8 с коммутантами экспоненты 2 и во всякой группе из K централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, – абелева подгруппа, но класс $L(qK)$ содержит нильпотентную группу ступени 3.

В [10] установлено существование класса K такого, что во всякой группе из K централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, – абелева подгруппа, но класс *L(qK)* содержит нильпотентную группу ступени *4*.

Зафиксируем простое число *p*, $p \neq 2$. Будем рассматривать группу $A = gr(a,b \mid a^2 = 1, b^p = 1, a^{-1}ba = b^{-1})$.

Пусть N – многообразие групп, заданное тождествами:

$$(\forall x)(x^{2p} = 1), (\forall x)(\forall y)([x^2, y^2] = 1), (\forall x)(\forall y)([x, y]^p = 1).$$

В [11] доказано, что многообразие, порождённое группой A, совпадает с многообразием N и если K – многообразие, задаваемое формулами:

$$(\forall x)(x^{2p} = 1), (\forall x)(\forall y)([x, y, x]^p = 1), (\forall x)(\forall y)(\forall z)([(x^y)^2, (x^z)^2] = 1),$$

$$(\forall x)(\forall z)(\forall u)(\forall v)([x^u, x^v, (x^z)^2] = 1),$$

$$(\forall x)(\forall z)(\forall y)(\forall u)(\forall v)([x^u, x^v, [x^y, x^z]] = 1),$$

то класс Леви, порожденный многообразием N, совпадает с многообразием K.

Лемма 1. Если M – локально конечное многообразие групп, то *L(M)* также является локально конечным многообразием.

Лемма 2. Если конечно порожденная группа G принадлежит классу *L(N)*, то $G = Syl_p(G)\lambda Syl_2(G)$.

Утверждение 1. Если группа G принадлежит классу *L(N)*, то G *3*-метабелева группа.

Теорема 1. Если $p \neq 3$ и G – подпрямо неразложимая группа, принадлежащая классу *L(N)*, то

$$Syl_p(G) = F_2(x_1, y_1) \times \ldots \times F_2(x_n, y_n)([x_1, y_1] = \ldots = [x_n, y_n])$$

и $G = Syl_p(G)\lambda B$, где В – циклическая группа порядка *2*.

Библиографический список

1. Kappe L.C. On Levi-formation // Arch. Math. – 1972. – V. 23, №6. – P. 561–572.

2. Levi F.W. Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic condition // J. Indian Math. Soc. – 1942. – V. 6. – P. 87–97.

3. Morse R.F. Levi-properties generated by varieties // The mathematical legacy of Wilhelm Magnus. Groups, geometry and special functions (Contemp. Math., 169), Providence, RI, Am. Math. Soc. – 1994. – P. 467–474.

4. Будкин А.И. Квазимногообразия Леви // Сибирский математический журнал. – 1999. – Т.40, №2.– С. 266–270.

5. Будкин А.И., Таранина Л.В. О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентными группами // Сибирский математический журнал. – 2000. – Т. 41, №2.– С. 270–277.

6. Будкин А.И. О классах Леви, порожденных нильпотентными группами // Алгебра и логика. – 2000. – Т. 39, № 6.– С. 635–647.

7. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентыми группами // Известия Алтайского государственного университета. – 2009. – Т. 61, №1.– С. 26–29.

8. Лодейщикова В.В. О классах Леви, порожденных нильпотентыми группами // Сибирский математический журнал. – 2010. – Т. 51, №6.– С. 1359–1366.

9. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви экспоненты p^s // Алгебра и логика. – 2011. – Т. 50, №1.– С. 26–41.

10. Лодейщикова В.В. Об одном квазимногообразии Леви экспоненты 8 // Известия Алтайского государственного университета. – 2010. – Т. 65, №1/2.– С. 42–45.

11. Лодейщикова В.В. Об одном классе Леви экспоненты 2p // Известия Алтайского государственного университета. – 2014. – Т. 81, №1.– С. 45–51.

УДК 512.54

Фильтры в решетках $L_q(M{\cdot}N)$, где $M{\cdot}N$ – квазимногообразие групп

В.Н. Токарев

АлтГТУ, г. Барнаул

В данной работе исследуются фильтры в решетках $\boldsymbol{L_q(M{\cdot}N)}$, где $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ – некоторые квазимногообразия групп.

Определение. Пусть $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ – квазимногообразия. Произведение многообразий: группа G∈ $M{\cdot}N$ <=> ∃M & M ⊲ G & M∈ $\boldsymbol{M}$ & G/M ∈ N.

Определение. Фильтром в решетке L называется непустое подмножество M, элементы которого удовлетворяют свойствам:

a) если a, b∈ M, то a ^ b∈M;

b) если a ∈ M и a ≤ b, то b ∈ M.

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Любой нетривиальный фильтр в решетке квазимногообразий $\boldsymbol{L_q(M{\cdot}A)}$ континуален, где $\boldsymbol{M}$ =qF (F – свободная группа ранга ≥ 2), $\boldsymbol{A}$ – квазимногообразие всех абелевых групп.