Секция 2. ГЕОМЕТРИЯ И АНАЛИЗ

УДК 514

С-ядро диадической кооперативной игры четырех игроков

К.О. Кизбикенов
АлтГПА, г. Барнаул

Рассмотрим бескоалиционную диадическую игру четырех лиц (то есть каждый игрок имеет ровно двс стратегии). Тогда каждый игрок имсст по двс стратегии. Мы получасм, таким образом, чстырс чстырехмерных матриц, по одному для каждого игрока, которую можно представить себе в виде вершин четырехмерного куба(гиперкуба).

Рис. 1. Гиперкуб

Из каждой вершины гиперкуба выходят четырс рсбра (рис. 1), каждос из которых задает стратегии игроков. На этом рисункс темным цвстом изображсны два трсхмерных куба – противоположные грани гипсркуба, это стратсгии одного из игроков, например пceрвого, аналогично, с помощью выбора другого ребра у соответствующего гиперкуба, которые соединяют противоположные грани (кубы) гиперкуба мы получим стратегии другого игрока и т.д.

С помощью датчика случайных чисел зададим 4 гиперкуба

$$A=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}10 & 10\\ 3 & 10\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}10 & 6\\ 9 & 10\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}7 & 6\\ 6 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4 & 10\\ 8 & 2\end{pmatrix}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & 8\\ 7 & 4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 6\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}10 & 7\\ 2 & 2\end{pmatrix}\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & 9\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3 & 1\\ 10 & 7\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}10 & 8\\ 1 & 4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}7 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 7\\ 3 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}7 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0 & 10\\ 5 & 8\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}10 & 2\\ 6 & 4\end{pmatrix}\end{pmatrix}.$$

Пусть $\Gamma = \{N, v, A_v\}\}$ кооперативная игра, где $N = \{1, 2, 3, 4\}$ – множество игроков, $v(S)$-характеристическая функция от всех непустыз подмножеств S из N, а A_v – множество всех дележей из R^N[1].

Найдем характеристическую функцию бескоалиционной игры, заданную гиперкубами A, B, C, D. Таким образом, надо найти выигрыши всевозможных коалиций из четырех игроков A, B, C, D. Например, выигрыш коалиции из игроков $S = \{A, B\}$ ищется, как решение матричной игры, которая получается если сложить соответствующие матрицы выигрышей. В данном случае получаем

$$AB = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 10 & 14 \\ 11 & 6 & 11 & 16 \\ 9 & 11 & 9 & 6 \\ 14 & 17 & 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решая симплекс методом, получим $v(AB) = 138/13$, проводя аналогичные вычисления, получим искомую характеристическую функцию

$$v = \left\{\frac{17}{6}, 2, \frac{9}{4}, 1, \frac{174}{13}, \frac{32}{3}, 12, \frac{1123}{85}, \frac{104}{9}, 14, 13, 16, \frac{55}{4}, \frac{274}{23}, 39\right\}.$$

По свойству супердитивности характеристической функции: для любых не пересекающихся коалиций U и V справедливо неравенство

$[v(U) + v(V) \leq v(U \cup V)$.

Пусть $X = \{x, y, z, t\}$ дележ. Тогда по определению дележа и свойству супердитивности имеем систему неравенств [1] и одно равенство

$x \geq v(A)$, $y \geq v(B)$, $z \geq v(C)$, $t \geq v(D)$, $x + y \geq v(AB)$, $x + z \geq v(AC)$, $x + t \geq v(AD)$, $y + z \geq v(BC)$, $y + t \geq v(BD)$, $z + t \geq v(CD)$, $x + y + z \geq v(ABC)$, $x + y + t \geq v(ABD)$, $x + z + t \geq v(ACD)$, $y + z + t \geq v(BCD)$, $x + y + z + t = v(ABCD)$.

Выразив из последнего равенства t и подставив во все остальные неравенства, получим,

$x \geq v(A)$, $y \geq v(B)$, $z \geq v(C)$, $x \leq v(ABCD) - v(BCD)$, $y \leq v(ABCD) - v(ACD)$, $z \leq v(ABCD) - v(ABD)$, $x + y \geq v(AB)$, $x + y \leq V(ABCD) - v(CD)$, $x + z \geq v(AC)$, $x + z \leq v(ABCD) - v(BD)$, $y + z \geq v(BC)$, $y + z \leq v(ABCD) - v(AD)$, $x + y + z \geq v(ABC)$, $x + y + z \leq v(ABCD) - v(D)$.

Исключив переменную t, мы снизили размерность пространства до трех. Заметим, что первые 12 неравенств задают в пространстве два параллелепипеда, а последние два, часть полупространства, заключенную между параллельными плоскостями. Пересечение этих фигур, если оно не пусто и есть искомое С-ядро. С помощью программы написанной в системе Mathematica, которая автоматически вычисляет характеристическую функцию и строит С-ядро, находим решение задачи.

С-ядро в нашем случае, представляет собой выпуклый многогранник с 16 вершинами (рис. 2).

$$\left\{\frac{17}{6},\frac{823}{78},\frac{47}{6}\right\},\left\{\frac{17}{6},\frac{823}{78},\frac{1283}{78}\right\},\left\{\frac{17}{6},\frac{115}{6},\frac{47}{6}\right\},\left\{\frac{148}{13},2,\frac{953}{85}\right\},$$
$$\left\{\frac{148}{13},2,\frac{1879}{117}\right\},\left\{\frac{12418}{765},2,\frac{953}{85}\right\},\left\{\frac{101}{12},\frac{3727}{340},\frac{9}{4}\right\},\left\{\frac{101}{12},\frac{199}{12},\frac{9}{4}\right\},$$
$$\left\{\frac{4773}{340},\frac{3727}{340},\frac{9}{4}\right\},\left\{11,\frac{95}{9},\frac{148}{9}\right\},\{11,14,13\},\left\{\frac{130}{9},\frac{95}{9},13\right\},$$
$$\left\{\frac{35933}{6630},\frac{52807}{6630},\frac{34787}{6630}\right\},\left\{\frac{809}{117},\frac{757}{117},\frac{2402}{117}\right\},$$
$$\left\{\frac{13}{3},\frac{62}{3},\frac{19}{3}\right\},\left\{\frac{30013}{1530},\frac{8237}{1530},\frac{11977}{1530}\right\}.$$

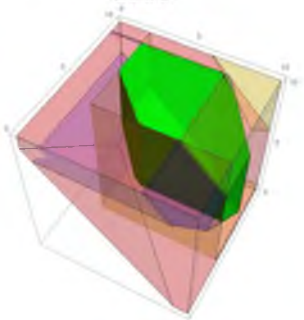

Рис. 2. С-ядро

Библиографический список

1. Воробьев Н.Н.. Теория игр. – М.: Наука, 1985. – 274 с.

УДК 514.765

Об однородных инвариантных солитонах Риччи на четырехмерных группах Ли

П.Н. Клепиков, Д.Н. Оскорбин, Е.Д. Родионов
АлтГУ, г. Барнаул

Исследованию инвариантных тензорных полей на однородных пространствах посвящены работы многих математиков (см., например, [1–20]). Важным обобщением эйнштейновых метрик (см. [1]) на римановых многообразиях являются солитоны Риччи, которые были впервые