УДК 514.75

Мебиусовые поверхности

М.А. Чешкова
АлтГУ, г. Барнаул

В евклидовом пространстве рассматриваются мебиусовые поверхности. В процессе исследования используется система компьютерной математики.

Пусть вдоль замкнутой кривой на поверхности обносится нормальный вектор. Если при возвращении в исходную точку направление нормали совпадает с исходным, независимо от выбора кривой, то поверхность называется двусторонней. В противном случае имеем одностороннюю поверхность.

Впервые уравнение односторонней поверхности, открытой Мебиусом, было получено Машке [1]. Если гауссова кривизна листа Мебиуса равна нулю, то он называется плоским. Библиография работ на эту тему дана в работе [2]. В [3] указано разрезание бутылки Клейна на два листа Мебиуса.

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим линейно независимые вектор-функции $s=s(v), l_1=l_1(v), l_2=l_2(v)$, где $s=s(v)$ является 2π -периодической, а $l_1=l_1(v), l_2=l_2(v)$ 2π -антипериодические вектор-функции. Удобно l_1, l_2 выбрать ортогональными.

Определим поверхность K уравнением

$$\begin{gathered} r(u,v)=s(v)+\sin(u)l_1(v)+a\sin(mu)l_2(v). \\ v=0..2\pi, u=0..\pi/m \end{gathered} \tag{1}$$

Теорема 1. *Поверхность K односторонняя.*

Доказательство. Исследуем вектор нормали вдоль замкнутой кривой $s=(v)(u=0)$.

$$n(v)=[r_u, r_v]=[s'(v), l_1(v)+aml_2(v)].$$

Так как $n(v)=-n(v+2\pi)$, то поверхность K есть односторонняя поверхность.

Теорема 2. *Поверхность K при m нечетном есть мебиусова поверхность.*

Доказательство. При m нечетном кривая $r(u)=(\sin(u), a\sin(mu))$ незамкнутая, и поверхность K есть поверхность с краем.

Если $m = 1$, или $a = 0$, то это отрезок прямой и поверхность K есть прямолинейный лист Мебиуса.

Рассмотрим несколько примеров поверхностей Мебиуса.

Зададим вектор-функции $s = s(v), l_1 = l_1(v), l_2 = l_2(v)$ в виде

$$s(v) = (2\cos(v), 2\sin(v), 0),$$

$$l_1(v) = (\cos(kv/2)\cos(v), \cos(kv/2)\sin(v), \sin(kv/2)),$$

$$l_2(v) = (\sin(kv/2)\cos(v), \sin(kv/2)\sin(v), -\cos(kv/2)), \qquad (2)$$

где k – нечетное число.

Пример 1. Положим $k = 1, a = 1, m = 3$. Имеем

$$r(u,v) = (2\cos(v) + \sin(u)\cos(v/2)\cos(v) + \sin(3u)\sin(v/2)\cos(v),$$
$$2\sin(v) + \sin(u)\cos(v/2)\sin(v) + \sin(3u)\sin(v/2)\sin(v),$$
$$\sin(u)\sin(v/2) - \sin(3u)\cos(v/2), u \in [-\pi/3, \pi/3], v \in [0, 2\pi].$$

Полагая $u = \pi/3$, получим край.

Построим поверхность Мебиуса, используя математический пакет (рис. 1).

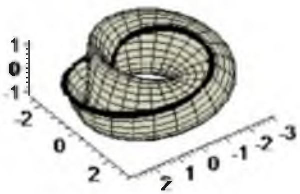

Рис. 1. Лист Мебиуса $k = 1, a = 1, m = 3$

Пример 2. Положим $k = 3, a = 1, m = 3$. Имеем

$$r(u,v) = (2\cos(v) + \sin(u)\cos(3v/2)\cos(v) + \sin(3u)\sin(3v/2)\cos(v),$$
$$2\sin(v) + \sin(u)\cos(3v/2)\sin(v) + \sin(3u)\sin(3v/2)\sin(v),$$
$$\sin(u)\sin(3v/2) - \sin(3u)\cos(3v/2), u = -\pi/3,\ldots,\pi/3, v = 0,\ldots,2\pi.$$

Полагая $u = \pi/3$, получим край.

Построим поверхность Мебиуса (рис. 2).

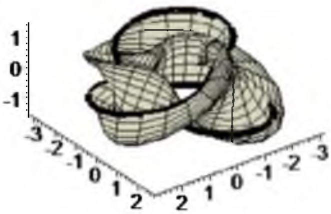

Рис. 2. Лист Мебиуса $k = 3, a = 1, m = 3$

Пример 3. Положим $k = 1, a = 1, m = 5$. Имеем

$$r(u,v) = (2\cos(v) + \sin(u)\cos(v/2)\cos(v) + \sin(5u)\sin(v/2)\cos(v),$$
$$2\sin(v) + \sin(u)\cos(v/2)\sin(v) + \sin(5u)\sin(v/2)\sin(v), \qquad .$$
$$\sin(u)\sin(v/2) - \sin(5u)\cos(v/2), u \in [-\pi/5, \pi/5], v \in [0, 2\pi].$$

Полагая $u = \pi/5$, получим край.

Построим поверхность Мебиуса, используя математический пакет (рис. 3).

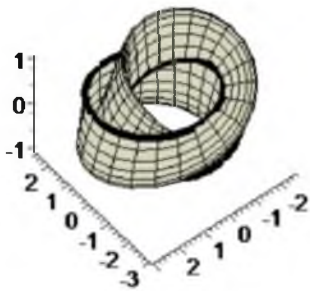

Рис. 3. Лист Мебиуса $k = 1, a = 1, m = 5$

Пример 4. Положим $k = 3, a = 1, m = 5$. Имеем

$$r(u,v) = (2\cos(v) + \sin(u)\cos(3v/2)\cos(v) + \sin(5u)\sin(3v/2)\cos(v),$$
$$2\sin(v) + \sin(u)\cos(3v/2)\sin(v) + \sin(5u)\sin(3v/2)\sin(v),$$
$$\sin(u)\sin(3v/2) - \sin(5u)\cos(3v/2), u = -\pi/5, \dots, \pi/5, v = 0, \dots, 2\pi.$$

Полагая $u = \pi/5$, получим край.

Построим поверхности Мебиуса (рис. 4).

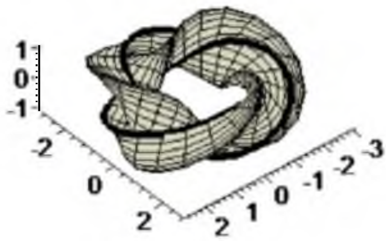

Рис. 4. Лист Мебиуса $k = 3, a = 1, m = 5$

Библиографический список

1. Mashke H. Note on the unilateral surface of Moebius // Trans. Amer. Math. Sos., 1:1(1900).

2. Сабитов И.Х. Изометрические погружения и вложения плоского листа Мебиуса в евклидовы пространства // Известия РАН. – 2007. – Т.71, №5. – С. 197-224.

3. Чешкова М.А.О бутылке Клейна // Известия Алтайского университета. – Барнаул, 2012. – №1/1. – С. 130-133.