Секция 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

УДК 536.25

Модельная задача фильтрации воды и воздуха в деформированном грунте

И.Г. Ахмерова И.Г.
АлтГУ, г. Барнаул

Рассматривается процесс фильтрации воды и воздуха в деформированном грунте. Грунт является трехфазной средой, состоящей из воды $(i=1)$, воздуха $(i=2)$ и твердой деформируемой пористой среды $(i=3)$. Уравнения сохранения массы для каждой из фаз, закон Дарси для воды и воздуха и закон сохранения импульса для твердой матрицы с учетом принципа Терцаги, обобщенного закона Гука и эффекта капиллярных сил имеют вид [1, 2]:

$$\frac{\partial(\rho_i^0 s_i m)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_i^0 s_i m u_i)}{\partial x}=0,\quad i=1,2;$$

$$\frac{\partial(\rho_3^0(1-m))}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_3^0(1-m)u_3)}{\partial x}=0;$$

$$ms(u_1-u_3)=-K_0\frac{k_{01}}{\mu_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}+\rho_1^0 g\right),\quad s_1\equiv s,\quad s_2\equiv 1-s;$$

$$m(1-s)(u_2-u_3)=-K_0\frac{k_{02}}{\mu_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x}+\rho_2^0 g\right),\quad p_1-p_2=p_c(s);$$

$$\frac{\partial\sigma_{kl}^f}{\partial x}-(1-m)\frac{\partial P}{\partial x}-(p_1-p_2)m\frac{\partial s}{\partial x}+K_{23}(u_2-u_3)+$$

$$+K_{13}(u_1-u_3)+\rho_3^0(1-m)g=0;$$

$$\sigma_{kl}^f=(1-m)(\lambda_1 e\delta_{kl}+2\lambda_2 e_{kl}+\beta_s K p_c(s)\delta_{kl}).$$

Здесь u_i – скорость i-ой фазы, ρ_i – приведенная плотность, связанная с истинной плотностью ρ_i^0 и объемной концентрацией α_i

соотношением $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ $(\alpha_1 = ms_1, \alpha_2 = ms_2, \alpha_3 = 1-m)$; s_1, s_2 - насыщенности воды и воздуха; m – пористость грунта; K_0 – тензор фильтрации; k_{0i} – относительные фазовые проницаемости; μ_i - вязкость i-ой фазы; p_i – давление i-ой фазы; $p_c(s)$ – равновесное капиллярное давление; σ_{kl}^f – полное эффективное напряжение при двухфазном насыщении среды ($\sigma_{kl}^f = \Gamma_{kl} + P\delta_{kl}$); Γ_{kl} – полное напряжение в среде ($\Gamma_{kl} = (1-m)\sigma_{kl} - msp_1\delta_{kl} - m(1-s)p_2\delta_{kl}$); σ_{kl} – истинное напряжение твердой фазы, δ_{kl} – единичный тензор, P – полное давление первой и второй фазы ($P = sp_1 + (1-s)p_2$); K_{ij} – коэффициент взаимодействия фаз; $(1-m)\lambda_1, (1-m)\lambda_2$ - коэффициенты Ламе; $(1-m)K$ – модуль всестороннего сжатия сухой пористой среды; e_{kl} – полная деформация пористой среды ($e_{kl} = e_{kl}^f + e_{kl}^\rho + e_{kl}^s$, $e_{kl} = \frac{1}{2}(\frac{\partial\omega_k}{\partial x_l} + \frac{\partial\omega_l}{\partial x_k})$, где $\overleftarrow{\omega}$ – вектор перемещения твердых частиц), e_{kl}^ρ - деформация изменения плотности материала твердых частиц ($e_{kl}^\rho = -\frac{1}{3}\beta_3\sigma_{mn}\delta_{mn}\delta_{kl}$, β_3 – коэффициент изотермической сжимаемости материала индивидуальных частиц матрицы), e_{kl}^s – деформация матрицы из-за изменения капиллярных сил ($e_{kl}^s = -\frac{1}{3}\beta_s(p_c(s) - p_c(s_0))\delta_{kl}$, β_s – коэффициент набухания (усадки) матрицы при изменениях насыщенности в силу действия капиллярных сил, $s_0 = 0$ при $x = 0$), $e = tr(e_{kl})$), e_{kl}^f – деформация переупаковки (в случае упругого состояния матрицы связаны с эффективным напряжением законом Гука); g – ускорение силы тяжести. Подобные модели рассматривались при решении задачи о тающем снеге. В работе [3] была численно решена двумерная задача снеготаяния.

Для данной системы уравнений рассматривается автомодельное решение типа «бегущей волны» в области $(-\infty, ct)$. Предполагая все искомые функции зависящими только от переменной $\xi = x - ct$ (c – неизвестная постоянная). Вектор ускорения в системе координат xyz

имеет вид $\overleftarrow{g} = (-g,0,0)$ [4]. Тогда в одномерном случае исходная система имеет вид:

$$-c\frac{d(\rho_1^0 sm)}{d\xi} + \frac{d(\rho_1^0 smu_1)}{d\xi} = 0,$$

$$-c\frac{d(\rho_2^0(1-s)m)}{d\xi} + \frac{d(\rho_2^0(1-s)mu_2)}{d\xi} = 0,$$

$$-c\frac{d(\rho_3^0(1-m))}{d\xi} + \frac{d(\rho_3^0(1-m)u_3)}{d\xi} = 0; \qquad (1)$$

$$ms(u_1 - u_3) = -K_0\frac{k_{01}}{\mu_1}\left(\frac{dp_1}{d\xi} - \rho_1^0 g\right); \qquad (2)$$

$$m(1-s)(u_2 - u_3) = -K_0\frac{k_{02}}{\mu_2}\left(\frac{dp_2}{d\xi} - \rho_2^0 g\right); \qquad (3)$$

$$\frac{d\sigma_{11}^f}{d\xi} - (1-m)\frac{dP}{d\xi} - (p_1 - p_2)m\frac{ds}{d\xi} +$$

$$+K_{23}(u_2 - u_3) + K_{13}(u_1 - u_3) + \rho_3^0(1-m)g = 0; \qquad (4)$$

$$\sigma_{11}^f = (1-m)((\lambda_1 + 2\lambda_2)e_{11} + \beta_3 KP\delta_{kl} + \beta_s Kp_c(s))\delta_{kl}; \qquad (5)$$

$$-c\frac{de_{11}}{d\xi} = \frac{du_3}{d\xi}, \quad p_1 - p_2 = p_c(s); \qquad (6)$$

$$s|_{\xi\to-\infty} = 0, u_i|_{\xi\to-\infty} = 0, p_2(0) = p_2^+, u_i(0) = u_i^+, \quad i = 1,2,3. \qquad (7)$$

Искомыми являются функции $s(\xi)$, $m(\xi)$ и c. Решение задачи (1)-(7) находим следующим образом. Интегрируя уравнения (1) и (6) находим постоянную c и получаем представления для истинных скоростей воды, воздуха и твердой матрицы и e_{11}. Используя представления для скоростей и (2),(3), приходим к уравнению для насыщенности $s(\xi)$. Подставляя (5) в (4) с учетом (3) и представления e_{11}, получим уравнение для пористости $m(\xi)$.

Библиографический список

1. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика Насыщенных пористых сред. – М. : Изд-во Недраб, – 1970.

2. Ведерников В.В., Николаевский В.Н. Уравнения механики пористых сред, насыщенных двухфазной жидкостью // Изв. АН СССР. - Механика жидкости и газа. – 1978. – Т. 5.

3. Гоман В.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Численное решение двумерной задачи движения воды и воздуха в тающем снеге // Известия Алтайского университета. - Барнаул, 2014. – №1/2. – С. 15-20.

4. Папин А.А. Краевые задачи для уравнений двухфазной фильтрации. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2009.

УДК 513.2:57.017.64

Об одной нелинейной динамической системе

Н.Б. Аюпова, В.П. Голубятников
ИМ СО РАН, НГУ, г. Новосибирск

В работе [1] изучалась одна модель взаимодействия двух соседних идентичных клеток в имагинальном диске *D.melanogaster* на ранней стадии его развития. Здесь мы изучаем несколько более сложную ситуацию: пусть K_1, K_2, K_3 – три соседние клетки в таком диске, и в каждой из них содержатся белки AS-C, Delta и Notch. В дальнейшем все индексы j, k, m предполагаются равными 1 или 2 или 3, и $j \neq k \neq m \neq j$. Обозначим через x_j, y_j, z_j, соответственно, концентрации этих белков в клетке K_j и выпишем, следуя [3-5], систему кинетических уравнений, описывающую их взаимодействие:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(z_1) - x_1;\ \frac{dy_1}{dt} = \sigma_1(x_1) - y_1;\ \frac{dz_1}{dt} = \varsigma_{2,1}(y_2) + \varsigma_{3,1}(y_3) - z_1;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(z_2) - x_2;\ \frac{dy_2}{dt} = \sigma_2(x_2) - y_2;\ \frac{dz_2}{dt} = \varsigma_{1,2}(y_2) + \varsigma_{3,2}(y_3) - z_2; \quad (1)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = f_3(z_3) - x_3;\ \frac{dy_3}{dt} = \sigma_3(x_3) - y_3;\ \frac{dz_3}{dt} = \varsigma_{1,3}(y_1) + \varsigma_{2,3}(y_2) - z_3.$$

Все переменные и функции неотрицательны, функции f_j монотонно убывают, что описывает отрицательную обратную связь *(Notch)$_j$* ◄ *(AS-C)$_j$*. Функции σ_j и $\zeta_{k,m}$ монотонно возрастают, описывая положительные обратные связи внутри клеток: *(AS-C)$_j$→(Delta)$_j$*, и между клетками: *(Delta)$_k$→(Notch)$_j$←(Delta)$_m$*, см. [1]. На ранней стадии развития все клетки одинаковы, поэтому при всех $k \neq m$