УДК 517.95 + 532.5

Профильная задача движения грунтовых вод в окрестности водохранилища

И.В. Каракулова
АлтГТУ (АГУ), г. Барнаул

Грунтовая вода под влиянием градиента давления вынуждена двигаться через почву, каждая ее частица, проходя через нерегулярно расположенные поры между частицами почвы, описывает сложную траекторию.

Расчеты гидродинамических процессов водохранилища основаны на континуальной модели, описывающей движение однородной и несжимаемой жидкости в пористой среде [1, 2].

Уравнения неразрывности и движения имеют вид:

$$div\left(\vec{q}\right) = S\,, \tag{1}$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{q}\right) = -grad\left(\frac{P}{\rho g} + y\right) + \frac{\vec{F}}{g}\,, \tag{2}$$

где $\vec{q} = m\vec{\upsilon}$ – скорость фильтрации, S – источники и стоки, m – пористость среды, $\vec{\upsilon}$ – скорость, t – время, $\vec{F}$ – сила трения для единичной массы, g – ускорение свободного падения, P – гидравлическое давление, ρ – плотность жидкости, y – вертикальная текущая координата.

Скорость фильтрации связана с вязкостью:

$$\vec{q} = -K\frac{\vec{F}}{g}\,, \tag{3}$$

где K – гидравлическая проницаемость (коэффициент фильтрации).

При установившемся движении в пористой среде временная зависимость отсутствует, поэтому член $\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{q}\right)$ в уравнениях (2) отбрасывается.

Введение пьезометрической высоты (потенциала скорости)

$$\Phi = \frac{P}{\rho g} + y \tag{4}$$

приводит (2) к закону Дарси:

$$\vec{q} = -K \cdot grad\,\Phi\,. \tag{5}$$

Учитывая уравнение неразрывности (1) получаем уравнение для $\mathbf{\Phi}$

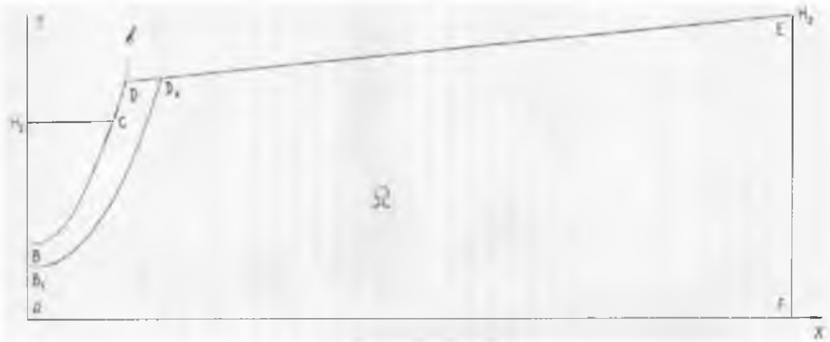
$$div\left(K \cdot grad\,\Phi\right) = S\,. \tag{6}$$

Коэффициент фильтрации $\boldsymbol{K}$ связан с проницаемостью $\boldsymbol{k}$ пористой среды и вязкостью жидкости $\boldsymbol{\mu}$ следующим образом:

$$K = \frac{k\rho g}{\mu}, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{k}$ – тензор второго ранга.

Расчетная область



Граничные условия:

$$AB: \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0 \text{ (ось симметрии)}, \tag{8}$$

$$AF: \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0 \text{ (водонепроницаемая граница)}, \tag{9}$$

$$BC: \quad \Phi = H_1, \tag{10}$$

$$CD: \quad \Phi = y, \text{ (промежуток высачивания)} \tag{11}$$

$$EF: \quad \Phi = H_2, \tag{12}$$

$$DE: \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0, \tag{13}$$

где H_1 – уровень воды в водохранилище, H_2 – естественный уровень грунтовых вод на достаточно большом удалении от водохранилища, $\vec{n}$ – нормаль к границе.

Реализация метода конечных элементов:

$$\Phi = N_i\Phi_i + N_j\Phi_j + N_k\Phi_k\,. \tag{14}$$

Дифференциальное уравнение (6) описывающее плоское безвихревое движение грунтовых вод принимает вид:

$$K_{xx}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+K_{yy}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-S=0, \tag{15}$$

где K_{xx} и K_{yy} – коэффициенты фильтрации в направлениях x и y соответственно, Φ – пьезометрическая высота, S – источники и стоки.

Граничные условия (8)-(14) могут быть записаны в следующем виде:

$$\Phi=\Phi_0, \tag{16}$$

и (или)

$$K_{xx}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\ell_x+K_{yy}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\ell_y+s=0, \tag{17}$$

s –поток воды, движущейся через границу.

Компоненты вектора скорости фильтрации выражаются через пьезометрический напор следующим образом:

$$q_x=-K_{xx}\frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad q_y=-K_{yy}\frac{\partial\Phi}{\partial y}. \tag{18}$$

В области $ABCDEF$ пьезометрический потенциал Φ удовлетворяет эллиптическому уравнению (6). На границе $\partial\Omega$ области Ω задаются линейные граничные условия для Φ: (8)-(12) и

$$DE:\quad \Phi=H \text{ (свободная поверхность).} \tag{19}$$

Движение свободной поверхности DE, задаваемой равенством $G(x,y,t)=0$, описывается уравнением:

$$m\frac{\partial G}{\partial t}=K\cdot grad\,\Phi\cdot grad\,G. \tag{20}$$

Аппроксимация свободной границы: пусть уравнение свободной границы DE имеет вид $y=H(x,t)$. Тогда, считая $K_{xy}=K_{yx}=0$, получим (20) в виде:

$$m\frac{\partial H}{\partial t}=K_{xx}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x}-K_{yy}\frac{\partial\Phi}{\partial y}. \tag{21}$$

Используя условие (19), имеем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\left(1-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\frac{\partial H}{\partial x}, \text{ при } y=H(x,t).$$

Подставляя это выражение в (21) получим:

$$m\frac{\partial H}{\partial t}=K_{xx}\left(1-\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2-K_{yy}\frac{\partial \Phi}{\partial y},\ \text{при}\ y=H(x,t). \quad (22)$$

Применим метод квалиаризации. Нелинейный член в (22) раскладывается в ряд Тейлора и аппроксимируется следующим образом:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2\approx\left(\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x}\right)\left[\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x}\right],$$

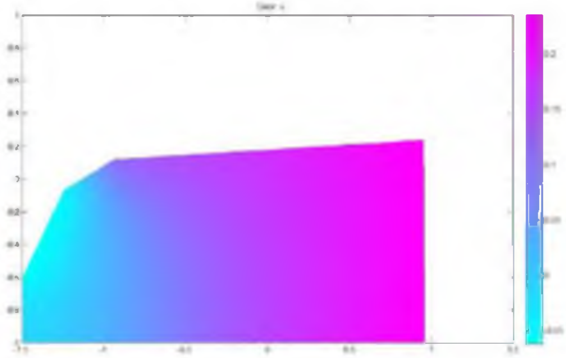
где $\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x}$ –неизвестная функция–первая аппроксимация для $\frac{\partial H}{\partial x}$. Тогда уравнение (22) переходит в

$$m\frac{\partial H}{\partial t}=K_{xx}\left(1-\Phi_y\right)\left[2\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x}-\left(\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x}\right)^2\right]-K_{yy}\Phi_y. \quad (23)$$

Численная реализация: алгоритм состоит из двух итерационных процессов вложенных один в другой. На первом этапе решается задача нахождения потенциала скоростей с небольшим временным шагом при заданных граничных условиях, во внутреннем цикле вычисляется свободная поверхность.

Для решения краевой задачи были использованы свободно распространяемые пакеты математического моделирования, основанные на методе конечных элементов: freefem++3.35 (Франция) и Elmer7.0 (Финляндия).

Пример расчета



Библиографический список

1. Введение в динамику жидкости. Бэтчелор Дж. / пер. с англ. – М.: Мир, 1973. – 778 с.

2. Винников В.А., Каркашадзе Г.Г. Гидромеханика: учебник для вузов. – М.: Изд-во Московского государственного горного университета, 2003. – 302 с.

3. Кочина П.Я., Кочина Н.Н. Задачи о движениях со свободной поверхностью в подземной гидродинамике. – М.: Редакция журнала «Успехи физических наук» РАН, 1995. – 172 с.

4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: учеб. для вузов.-7-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.

УДК 532

Моделирование конвективного течения жидкости с испарением на основе приближения тонкого слоя уравнений конвекции Обербека-Буссинеска

Л.А. Масенюк, Е.В. Резанова, Я.А. Тарасов
АлтГУ, г. Барнаул

Динамика, устойчивость и разрыв тонких пленок жидкостей встречаются во многих областях инженерии, геофизики и биофизики. В частности, в промышленных технологиях применяются тонкие пленки жидкостей для охлаждения локально нагреваемых поверхностей [1]. Построению математических моделей, описывающих течения тонких слоев жидкостей, исследованию их устойчивости и численному решению посвящено достаточно много работ [2-5]. Моделирование испаряющихся пленок проводится в работах [4-7].

В данной работе исследуется процесс стекания тонкого слоя вязкой, несжимаемой жидкости по неравномерно нагретой, наклоненной под углом α к линии горизонта подложке. Сопутствующий поток газа движется над слоем жидкости. Требуется учесть эффекты испарения на термокапиллярной границе.

Течение жидкости моделируется при помощи системы уравнений конвекции Обербека-Буссинеска [8] и обобщенных кинематического, динамического и энергетического условий на границе раздела [9]. При построении математической модели выбираются два характерных масштаба – продольный l и поперечный d. Решение задачи строится в виде разложений по степеням малого параметра ε, равного отношению характерной поперечной длины к продольной.

В безразмерном виде классические уравнения конвекции могут быть записаны следующим образом [6]: