2. Винников В.А., Каркашадзе Г.Г. Гидромеханика: учебник для вузов. – М.: Изд-во Московского государственного горного университета, 2003. – 302 с.

3. Кочина П.Я., Кочина Н.Н. Задачи о движениях со свободной поверхностью в подземной гидродинамике. – М.: Редакция журнала «Успехи физических наук» РАН, 1995. – 172 с.

4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: учеб. для вузов.-7-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.

УДК 532

Моделирование конвективного течения жидкости с испарением на основе приближения тонкого слоя уравнений конвекции Обербека-Буссинеска

Л.А. Масенюк, Е.В. Резанова, Я.А. Тарасов

АлтГУ, г. Барнаул

Динамика, устойчивость и разрыв тонких пленок жидкостей встречаются во многих областях инженерии, геофизики и биофизики. В частности, в промышленных технологиях применяются тонкие пленки жидкостей для охлаждения локально нагреваемых поверхностей [1]. Построению математических моделей, описывающих течения тонких слоев жидкостей, исследованию их устойчивости и численному решению посвящено достаточно много работ [2-5]. Моделирование испаряющихся пленок проводится в работах [4-7].

В данной работе исследуется процесс стекания тонкого слоя вязкой, несжимаемой жидкости по неравномерно нагретой, наклоненной под углом α к линии горизонта подложке. Сопутствующий поток газа движется над слоем жидкости. Требуется учесть эффекты испарения на термокапиллярной границе.

Течение жидкости моделируется при помощи системы уравнений конвекции Обербека-Буссинеска [8] и обобщенных кинематического, динамического и энергетического условий на границе раздела [9]. При построении математической модели выбираются два характерных масштаба – продольный l и поперечный d. Решение задачи строится в виде разложений по степеням малого параметра ε, равного отношению характерной поперечной длины к продольной.

В безразмерном виде классические уравнения конвекции могут быть записаны следующим образом [6]:

$$
\begin{gathered}
Re\varepsilon^2(u_t + uu_x + wu_z) = u_{zz} - p'_x + \varepsilon^2 u_{xx} - \gamma_1 \sin\alpha T, \\
Re\varepsilon^4(w_t + uw_x + ww_z) = \varepsilon^2 w_{zz} - p'_z + \varepsilon^4 w_{xx} + \gamma_2 \cos\alpha T, \\
u_x + w_z = 0, \\
RePr\varepsilon^2(T_t + uT_x + wT_z) = \varepsilon^2 T_{xx} + T_{zz}.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Здесь (u, w) – вектор скорости, $p' = p - \dfrac{\gamma_1}{Bu} x\sin\alpha + \gamma_2 z\cos\alpha$ – безразмерное модифицированное давление, T – температура, $\gamma_1 = \dfrac{Gr}{\varepsilon}$, $\gamma_2 = \dfrac{Gr}{Re}$, $Pr = \dfrac{\nu}{\chi}$ – число Прандтля, $Gr = \dfrac{d^3 g\beta T_*}{\nu^2}$ – число Грасгофа, $Re = \dfrac{u_* l}{\nu}$ – число Рейнольдса. При этом вектор ускорения силы тяжести имеет вид $\vec{g} = (g\sin\alpha, -g\cos\alpha)$, ν – коэффициент кинематической вязкости, χ – коэффициент температуропроводности, β – коэффициент теплового расширения, а T_* и u_* – характерные значения температуры и продольной скорости.

На термокапиллярной границе раздела $z = h(x,t)$ выполняются обобщенные кинематическое, динамическое и энергетические условия (см. [6, 7, 9]). Для задания зависимости локального потока массы испаряющейся жидкости от температуры на границе раздела используется кинетическое уравнение Герца-Кнудсена [6, 7, 9]. На твердой, непроницаемой границе $z = 0$ выполняются условия прилипания $u|_{z=0}$, $w|_{z=0}$, а также условие неоднородного нагрева вида $T|_{z=0} = \Theta_0(x,t)$.

Задача сводится к поиску главных и первых членов разложения по степеням малого параметра ε. Все искомые функции будут найдены, как только станет известна толщина слоя h. Для нахождения толщины слоя имеет место уравнение, которое является следствием обобщенного кинематического условия

$$
h_t + uh_x - w + \frac{E}{\varepsilon} J_{ev} = 0,
$$

а именно [6]:

$$h_t + h_x[h^4 \frac{1}{24}\left(\gamma_2 \cos\alpha A_x + \varepsilon\gamma_2 \cos\alpha B_x\right) +$$
$$+h^3 \frac{1}{6}\left((\Theta_0)_x \gamma_2 \cos\alpha + A\gamma_1 \sin\alpha + \varepsilon\gamma_1 \sin\alpha B\right) +$$
$$+h^2 \frac{1}{2}\left((C_0)_x + \Theta_0\gamma_1 \sin\alpha + \varepsilon(\bar{C}_0)_x\right) + h(C_1 + \varepsilon\bar{C}_1)] +$$
$$+[h^5 \frac{1}{120}\left(\gamma_2 \cos\alpha(A_{xx} + \varepsilon B_{xx})\right) +$$
$$+h^4 \frac{1}{24}\left((\Theta_0)_{xx}\gamma_2 \cos\alpha + \gamma_2 \sin\alpha(A_x + \varepsilon B_x)\right) +$$
$$+h^3 \frac{1}{6}\left((C_0)_{xx} + (\Theta_0)_x\gamma_1 \sin\alpha + \varepsilon(\bar{C}_0)_{xx}\right) + h^2 \frac{1}{2}\left((C_1)_x + \varepsilon(\bar{C}_1)_x\right)] +$$
$$+\frac{E\alpha_J}{\varepsilon}(Ah + \Theta_0 + \varepsilon Bh) = 0.$$

Предполагается, что $Re = 1$. Функции A, B и Θ_0 определяют тепловой режим, а функции $C_0, C_1, \bar{C}_0, \bar{C}_1$ выражаются через A, B и Θ_0. Проведен параметрический анализ задачи для систем «жидкость-газ» типа «этанол-азот», «HFE7100-азот», «FC72-азот». Построен алгоритм численного решения задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-08-00163).

Библиографический список

1. Liu R., Kabov O.A. Effect of mutual location and the shape of heaters on the stability of thin films flowing over locally heated surfaces // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2013. – Vol. 65. – P. 23–32.

2.Копбосынов Б.К., Пухначев В.В. Термокапиллярное движение в тонком слое жидкости // Гидромеханика и процессы переноса в невесомости : сб. научн. тр. – 1983. – С. 116-125.

3. Miladinova S., Slavtchev S., Lebon G., Legros J.-C. Long-wave instabilities of non-uniformly heated falling films // J. Fluid Mech. – 2002. – Vol. 453. – P. 153-175.

4. Gatapova E. Ya., Kabov O. A. Shear-driven flows of locally heated liquid films // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2008. – Vol. 51. – Issues 19-20. – P. 4797-4810.

5. Kabova Yu., Kuznetsov V.V., Kabov O., Gambaryan-Roisman T., Stephan P. Evaporation of a thin viscous liquid film sheared by gas in a micro-

channel // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2014. – Vol. 68. – P. 527-541.

6. Гончарова О.Н., Резанова Е.В. Построение математической модели течений в тонком слое жидкости на основе классических уравнений конвекции и обобщенных условий на границе раздела // Известия Алтайского государственного университета. – 2015. – №85 (1/1). – С. 70-74.

7. Гончарова О.Н., Резанова Е.В., Тарасов Я.А. Математическое моделирование термокапиллярных течений в тонком слое жидкости с учетом испарения // Известия Алтайского государственного университета. – 2014. – №81 (1/1). – С. 47-52.

8. Андреев В.К., Гапоненко Ю.В., Гончарова О.Н., Пухначёв В.В. Современные математические модели конвекции. – М.: Физматлит. – 2008. – 368 с.

9. Гончарова О.Н. Моделирование течений в условиях тепло- и массопереноса на границе раздела // Известия Алтайского государственного университета. – 2012. – №73 (1/2). – С. 12-18.

УДК 517.95 + 556.342.2 + 539.217

Об одной модели двухфазной фильтрации в пороупругой среде

А.А. Папин, Ю.Ю. Подладчиков

АлтГУ г. Барнаул, университет Лозанны

Рассматривается изотермическое движение двух несмешивающихся жидкостей в деформируемой пористой среде. Уравнения сохранения массы для каждой из жидкостей и пористой среды, законы Дарси и Лапласа для жидкостей, а также реологическое соотношение для пористости имеют вид [1, 2]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho_i^0 s_i)+\nabla\cdot(\phi\rho_i^0 s_i\vec{u}_i)=0,\quad i=1,2,\quad \frac{\partial}{\partial t}((1-\phi)\rho_3^0)+\nabla\cdot((1-\phi)\rho_3^0\vec{u}_3)=0,$$

$$s_i\phi(\vec{u}_i-\vec{u}_3)=-K_0\frac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i}(\nabla p_i+\rho_i^0\vec{g}),\quad p_2-p_1=p_c(x,s_1),\quad s_1+s_2=1,$$

$$\nabla\cdot\vec{u}_3=-\frac{1}{\xi(\phi)}p_e-\beta_t(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t}+\vec{u}_3\cdot\nabla p_e),$$

$$\nabla p_{tot}=\rho_{tot}\vec{g},\quad p_e=p_{tot}-p_f,\quad p_f=s_1p_1+s_2p_2,$$