Математика, механика, информатика. – 2012. – Т. 12, вып.4. – С. 107-113.

12. Папин А.А., Ахмерова И.Г. Разрешимость системы уравнений одномерного движения теплопроводной двухфазной смеси // Математические заметки. – 2010. – Т. 87, вып. 2. – С. 246-261.

УДК 532.546+536.415

О точных решениях задачи протаивания грунта под действием инфильтрации осадков

А.Г. Петрова, А.С. Алейников, Ю.А. Бочкарева, Д.Л. Михина

АлтГУ, г .Барнаул

Работа посвящена построению точных решений с подвижной границей протаивания одномерной задачи тепломассопереноса с фазовым переходом в ненасыщенном грунте. Точные решения строятся в двух вариантах постановки задачи: без учета силы тяжести, и с учетом ее.

Основная модель формулируется в следующих предположениях: вода и лед несжимаемы, воздух – вязкий совершенный газ; температура и давление общие для скелета и пор; поверхность грунта подвержена воздействию выпадающего с определенной скоростью и температурой дождя [1].

Следуя [2], считаем, что область между дневной поверхностью и фронтом протаивания занята грунтом, который рассматривается как пористая среда с неподвижным скелетом и порами, заполненными водой и воздухом. Область перед границей фазового перехода занята мерзлым грунтом, в порах которого находится лед и воздух. Таким образом, в области $0<x<\xi(t)$ инфильтрации осадков выполнены следующие уравнения относительно неизвестных функций S-влагонасыщенности, плотности воздуха в порах ρ_a, температуры T и давления P.

$$n\rho_w \frac{\partial}{\partial t} S_w + \rho_w \frac{\partial}{\partial x}(v_w) = 0, \quad n\frac{\partial}{\partial t}\rho_a(1-S_w) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_a v_a) = 0,$$

$$v_j = -\frac{kf_j(S_w)}{\mu_j}P_x \qquad P = \rho_a RT, \qquad j = a, w,$$

$$(\rho C)_m \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[P\left(\upsilon_a + v_w\right)\right] + \left(\rho_w C_w v_w + C_v \rho_a v_a\right)\frac{\partial}{\partial x}T = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_m \frac{\partial}{\partial x}T\right).$$

В мерзлом грунте (область ξ(t)< x<Y) лед в порах и сам скелет неподвижны, следовательно, выполнены следующие уравнения:

$$n\rho_i \frac{\partial}{\partial t}S_i = 0,\ n\frac{\partial}{\partial t}\rho_a\left(1 - S_i\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_a v_a\right) = 0$$

$$v_a = -\frac{k}{\mu_a} f_a\left(S_i\right)\frac{\partial}{\partial x}P,\quad P = \rho_a RT,$$

$$(\rho C)_f \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(P v_a\right) + C_v \rho_a v_a \frac{\partial}{\partial x}T = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_{\mathrm{f}} \frac{\partial}{\partial x}T\right),$$

где

$$\lambda_{\mathrm{f}} = nS_i\lambda_i + n\left(1 - S_i\right)\lambda_a + \left(1 - n\right)\lambda_s,$$

$$\left(\rho C\right)_{\mathrm{f}} = nS_i\rho_i C_i + n\left(1 - S_i\right)\rho_a C_v + \left(1 - n\right)\rho_s C_s.$$

Нижние индексы $a, w, i\ s$ относятся к характеристикам воздуха, воды, льда и скелета грунта соответственно, нижние индексы m, f указывают на усредненную (эффективную) характеристику соответственно талого и мерзлого грунта, которая, здесь вычисляется как средневзвешенная.

На верхней границе задана температура осадков, насыщенность

$$T(0,t) = T_d,\quad S(0,t) = S_{gr};$$

и условие

$$-\frac{kf_w(S,x)}{\mu_w}\frac{\partial P}{\partial n}\bigg|_{x=0} = N(t),$$

где $N(t)$ - скорость дождя (объем воды, выпавшей на единицу поверхности x=0 за единицу времени).

На границе фазового перехода x=ξ(t) выполнены условия непрерывности температуры и давления

$$[T] = 0, [P] = 0,$$

условие фазового равновесия

$$T^* = T_{eq}(P),$$

где зависимость температуры от давления считается линейной, а также условия, следующие из законов сохранения

$$\left(S_w - \frac{S_i\rho_i}{\rho_w}\right)\dot{\xi}(t) = -\frac{k}{n\mu_w} f_w\left(S_w\right)\frac{\partial}{\partial x}P_m(\xi(t),t);$$

$$(S_i - S_w)\dot{\xi}(t) = \frac{k}{n\mu_a}\left(f_a\,(S_i)\frac{\partial}{\partial x}P_f - f_a\,(S_w)\frac{\partial}{\partial x}P_m \right).$$

Кроме того, имеет место условие Стефана

$$nS_i\rho_i q\dot{\xi}(t) = \lambda_f\,\frac{\partial}{\partial x}T_f\,(\xi(t),t) - \lambda_m\,\frac{\partial}{\partial x}T_m\,(\xi(t),t).$$

Здесь q – удельная скрытая теплота фазового перехода.

На неподвижной границе x=Y заданы температура и давление:

$$T(Y,t) = T_f, \quad P(Y,t) = P_f.$$

Здесь приведена задача без учета силы тяжести в обобщенном законе Дарси. Помимо этой постановки будем рассматривать также и постановку, в которой бобщенный закон Дарси имеет вид:

$$v_j = -kf_j(S)(P_x - \rho_j g)/\mu_j.$$

Без учета силы тяжести и при отсутствия дождя задача имеет стационарное решение с неподвижным фронтом, постоянным давлением, постоянной водонасыщенностью и линейным распределением температуры в обеих фазах. Это решение выписано в работе [2], где нелинейные уравнения задачи влияния осадков на скорость протаивания линеаризовались на найденном точном решении. Полученная задача со свободной границей для малых возмущений относительно стационарного решения далее численно решалась методом выпрямления фронта аналогично [3].

В случае учета силы тяжести стационарного решения нет; отсутствует оно также в задаче с дождем. Эти обстоятельства, а также потребность иметь точное решение для тестирования алгоритма численного решения приводят к необходимости исследовать возможность построения автомодельного решения типа бегущей волны, где все искомые функции зависят только от аргумента x-Vt, где V-постоянная скорость движения фронта протаивания.

В данной работе находятся условия существования автомодельного решения такого вида с постоянной положительной скоростью движения фронта и постоянной положительной и не превышающей единицы влагонасыщенностью.

Показывается, что в постановке без учета силы тяжести данное решение существует только при дополнительном соотношении на входные данные задачи – в частности, построено решение, в котором пористость не является произвольной, эта константа, лежащая между нулем и единицей, выбирается специальным образом из физических требований на знаки величин, составляющих решение. Решение типа бегущей волны строится в различных вариантах задачи – с учетом силы тяжести и без нее, а также в «однофазном» и «двухфазном» случаях.

Библиографический список

1. Васильев В.И., Максимов А.М., Петров Е.Е., Цыпкин Г.Г. Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. – М., 1996.
2. Петрова А.Г., Мошкин Н.П., Жирков А.Ф. Задача о возмущениях фазового фронта в ненасыщенном грунте под действием инфильтрации осадков // Известия Алтайского государственного университета. – Барнаул, 2015. – Т. 1, № 1 (85). – С. 100-106.
3. Воеводин А.Ф., Леонтьев Н.А., Петрова А.Г. Термодиффузионная задача о кристаллизации шара // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1982. – № 5. – С. 118.

УДК 551.345 + 539.3

Корректность начально-краевой задачи внутренней эрозии грунта

А.Н. Сибин, В.А. Вайгант

АлтГУ, г. Барнаул, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

В работе изучается следующая система уравнений составного типа:

$$\frac{\partial s\phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(K_0(\phi)a(s)\nabla s - b(s)v(t) + F(s,\phi)), \tag{1}$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} = -I(s,\phi), \tag{2}$$

решаемая в области $(x,t) \in Q_T = Q \times (0,T)$, $Q = (0,1)$, при краевых и начальных условиях

$$s(0,t) = s_0(t), \quad s(1,t) = s_1(t), \tag{3}$$

$$s(x,0) = s^0(x), \quad \phi(x,0) = \phi^0(x).$$

Данная начально-краевая задача описывает одномерное движение в неподвижной пористой среде двухфазной смеси, состоящей из твердых частиц и жидкости [1]. Здесь ϕ – пористость, s – насыщенность воды, I – интенсивность перехода массы из твердого скелета; кроме того $K_0(\phi)$, $a(s)$, $b(s)$, $F(s,\phi)$ – заданные функции.