8. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск, 1983.

9. Ахмерова И.Г., Папин А.А. Разрешимость краевой задачи для уравнений одномерного движения двухфазной смеси // Математические заметк. – 2014. – Т. 96, № 2. – С. 170-185.

10. Папин А.А., Ахмерова И.Г. Разрешимость системы уравнений одномерного движения теплопроводной двухфазной смеси // Математические заметки. – 2010. – Т. 87, № 2. – С. 246-261.

11. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.

12. Кружков С. Н., Сукорянский С. М. Краевые задачи для систем уравнений типа двухфазной фильтрации; постановка задач, вопросы разрешимости, обоснование приближенных методов // Матем. сб. – 1977. – Т. 104(146), № 1(9). – С. 69–88.

13. Папин А.А. Разрешимость «в малом» по начальным данным уравнений одномерного движения двух взаимнопронекающих вязких несжимаемых жидкостей // Сб. Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 2000. – Вып. 116. – С. 73-81.

УДК 532.546+517.958

Локализация решения уравнения движения жидкости в деформируемой пористой среде

М.А. Токарева, Ю.Ю. Подладчиков
АлтГУ, г. Барнаул

В работе рассмотрена математическая модель фильтрации жидкости в пороупругой среде с преобладанием упругих свойств относительно свойств вязкости и малом коэффициенте объемной сжимаемости твердой среды. Для описания процесса фильтрации жидкости в пороупругой средеиспользуются законы сохранения масс для жидкой и твердой фаз, закон Дарси для жидкости, учитывающий движение скелета, реологический закон типа Максвелла и уравнение сохранения импульса системы в целом. Система уравнений при переходе к переменным Лагранжа сводится к вырождающемуся на решении параболическому уравнению для пористости. Для устанавления свойства конечной скорости стабилизации решения при малом коэффициенте объемной сжимаемости твердой среды используется метод интегральных энергетических оценок [1, 2].

Рассматривается следующая система уравнений [3, 4]

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t}+div((1-\phi)\rho_s\vec{v}_s)=0,$$

$$\frac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t}+div(\rho_f\phi\vec{v}_f)=0,$$

$$\phi(\vec{v}_f-\vec{v}_s)=-\frac{k\phi^n}{\mu}(\nabla p_f+\rho_f\vec{g}),$$

$$\nabla\cdot\vec{v}_s=-\phi^b\beta_\phi\left(\frac{\partial p_e}{\partial t}+\vec{v}_s\cdot\nabla p_e\right),$$

$$\nabla p_{tot}=\rho\vec{g},$$

$$p_{tot}=\phi p_f+(1-\phi)p_s, p_e=(1-\phi)(p_s-p_f),$$

$$\rho=\rho_f\phi+\rho_s(1-\phi).$$

Данная квазилинейная система описывает пространственное нестационарное изотермическое движение сжимаемой жидкости в пороупругой среде, в которой преобладают упругие свойства относительно свойств вязкости. Здесь $\rho_f,\rho_s,\vec{v}_s,\vec{v}_f$ – соответственно истинные плотности искорости фаз; ϕ – пористость ($0\le\phi<1$); $\vec{g}=(0,0,-g)$ – плотность массовых сил; k – проницаемость, μ – динамическая вязкость жидкости; β_ϕ – коэффициент объемной сжимаемости твердой среды; b,m – параметры пороупругой среды; p_{tot} – общее давление; ρ – общая плотность среды. Задача записана в эйлеровых координатах (x_1,x_2,x_3), t. Истинные плотности жидкости и твердой среды ρ_f,ρ_s принимаются постоянными. Искомыми являются величины ϕ, $\vec{v}_s$, $\vec{v}_f$, p_f, p_s.

Ранее для этой модели была установлена локальная разрешимость [5], исследовано автомодельное решение в случае постоянства общего давления [6].

Система, записанная в переменных Лагранжа, сводится к одному уравнению для $s=\dfrac{\phi}{1-\phi}$:

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(A(s)\frac{\partial s}{\partial x}+D(s)\right), \qquad (1)$$

где

$$A(s)=\frac{k}{\mu\beta_\phi}s^{n-b}(1+s)^{-n+b-2},$$

$$D(s) = -\frac{k}{\mu}(s^n(1+s)^{-n-1}(\frac{\partial(1/\beta_\phi G(\phi^0)+p_e^0)}{\partial x}+$$
$$+\rho_s g+(1+2s)\rho_f g)).$$

Здесь предполагается, что

$$\begin{cases} 0 < n \le b \le n+2, \\ n+b \ge 2. \end{cases} \quad (2)$$

$$\exists\delta : \left|\frac{\partial(p_e^0+1/\beta_\phi G(\phi^0))}{\partial x}\right| \le \delta \quad \text{равномерно} \quad \text{по} \quad \beta_\phi,$$

почти всюду в Ω

$$0 \le s \le M. \quad (3)$$

Кроме того

$$\beta_\phi < \frac{4}{(n-b+2)LnM^{b-1}(mes\Omega)^{(b-n)/4}\beta^{1/\alpha}(1+M)^{n-b+2}}, \quad (4)$$
$$\text{где} \quad L = \delta + \rho_s g + \rho_f g(1+2M), \beta = \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha,$$
$$\alpha = (\frac{1}{r} - \frac{n-b+2}{4})(\frac{1}{2}+\frac{1}{r})^{-1}, r \ge 1.$$

Рассмотрим для уравнения (1) в области $(x,t) \in Q = \Omega \times (0,T)$, следующую начально-краевую задачу

$$s(x,0) = s_0(x), \qquad x \in \Omega; \qquad s|_{\partial\Omega} = 0, t \in (0,T). (5)$$

Теорема. Пусть s – обобщенное решение задачи (1), (5), и выполнены условия (2)–(4). Тогда существует конечное время t_0 такое, что $s(x,t) = 0, x \in \Omega, t \ge t_0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства №2014/2 и гранта РФФИ №13-08-01097.

Библиографический список

1. FaviniA., MarinoschiG. DegenerateNonlinearDiffusionEquations. Springer. 2012. 143p.

2. DiBenedettoE. DegenerateParabolic Equations. Springer-Verlag. 1993. 387p.

3. Bear J. Dynamics of Fluids in Porous Media. Elsevier, New York, 1972.

4. Morency C., Huismans R. S., Beaumont C., Fullsack P. A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to

disequilibrium compaction and delta stability // Journal of Geophysical Research, Vol. 112, 2007.

5. Папин А.А., Токарева М.А. Задача о движении сжимаемой жидкости в деформируемой горной породе // Известия Алтайского государственного университета. – 2011. – №1/2 (72). – С. 36-43.

6. Папин А.А., Токарева М.А. Динамика тающего деформируемого снежно-ледового покрова // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика, 12, 2012, 4, 107-113.

УДК 519.6

Применение метода конечных элементов к задаче о деформировании массива водонасыщенных пород

А.В. Устюжанова

АлтГУ, г. Барнаул

Процессы деформирования, протекающие в водонасыщенных средах, зависят от взаимосвязи геомеханических и гидродинамических закономерностей. При математическом моделировании необходимо учитывать влияние пористости материала на формирование напряженно-деформированного состояния. Водонасыщенный массив представляет собой двухфазную среду, для описания гидрогеомеханических процессов в которой используются уравнения движения жидкой и твердой фаз с учетом их взаимодействия [1].

При постановке и решении гидрогеомеханической задачи используется принцип К. Терцаги [2], согласно которому процесс деформирования породного скелета зависит от эффективных напряжений

$$\sigma_{ij}^{f} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij},$$

где σ_{ij} – полное напряжение; p – давление воды; индексы i, j принимают значения 1, 2, 3.

В работе [3] предлагается следующий подход к решению гидрогеомеханической задачи определения полей напряжений и деформаций в водонасыщенной среде. Взаимодействие твердой и жидкой фаз рассматривается последовательно при раздельном нахождении фильтрационного и механического полей. Вертикальная составляющая напряжений в водонасыщенном массиве определяется весом пород и находящейся в них водой

$$\rho g h(1-\varphi) + \rho_0 g h_0 \varphi,$$