Секция 1. АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Вербальные ℓ-подгруппы, порожденные множеством слабых тождеств

Н.В. Баянова
АлтГУ, г. Барнаул

Пусть F свободная ℓ-группа счетного ранга, G – произвольная ℓ-группа. Подмножество $S \subset F$ назовем *множеством слабых тождеств в ℓ-группе G*, если существует такое целое N, что для любых элементов $s_k \in S(k = 1,\ldots,N)$ и любого ℓ-гомоморфизма $\rho : F^{\times N} = \underbrace{F \times F \times \ldots \times F}_{N} \to G$ найдется k $(1 \le k \le N)$ такой, что $\rho\ (i_k(s_k)) = e$, где i_k – вложение F в $F^{\times N}$ –= на k-ю компоненту.

Справедлива следующая

Теорема. *Если $S \subset F$ множество слабых тождеств в ℓ-группе G, тогда вербальная выпуклая ℓ-подгруппа $H = (\ S\ )_\ell \lhd F$, порожденная множеством S является множеством слабых тождеств в G.*

Библиографический список

1. Kassabov, M. Weak identities in finitely generated groups // arXiv:math/0311494v1.–2003. – Режим доступа : http:/arxiv.org/math/ 0311494 – Загл. с экрана.

Алгоритмические проблемы конечных автоматов и нормальное исчисление Поста

Н.В. Белякин, В.А. Ганов
Институт математики СО РАН, г. Новосибирск,
АлтГУ, г. Барнаул

В [1] строится конкретный базис конечных автоматов, и определяются логические сети над этим базисом. Доказывается, что класс операторов, реализуемых такими сетями, не является рекурсивным. При этом существенно используется алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания выводимости слов в нормальном исчислении Поста [2]. Но последний факт, вообще говоря, доказывается в языке формальной арифметики, и, это обстоятельство не вполне устраивает авторов этой статьи. Дело в том, что в работе [3] установлена ω-противоречивость системы аксиом арифметики Пеано. И хотя непротиворечивость этой системы не исключена, но известно, что в ней доказуемы интуитивно ложные предложения.

Поэтому безоглядное использование арифметики Пеано при доказательстве какого-либо утверждения порождает сомнение в том, что в итоге было получено окончательное доказательство рассматриваемого утверждения. Эта ситуация конечно серьезная, требует тщательного исследования и в немалом объеме, но это то, что запланировано на будущее. А в связи с результатами работы [1] возникает вопрос: «Что такое нерекурсивность или алгоритмическая неразрешимость?» И здесь требуется достаточное, быть может, радикальное переосмысление этого понятия.

По сравнению с [1] в данной работе строится новый базис конечных автоматов C, связанный с нормальным исчислением Поста над фиксированным алфавитом A_0 (сокращенно *ИП*) (см. [2, с. 299]). Автоматы по-прежнему являются так называемыми автоматами Мура, но их схема и программы существенно изменены. Наглядно они изображаются прямоугольниками с входящей и выходящей стрелками, которые обозначают их входной и выходной каналы соответственно (см. рис. 1).

Рис. 1

Внешний алфавит A всех автоматов одинаковый и содержит буквы μ, ω и буквы из A_0 с дополнительными верхними индексами. В любой момент времени t автомат находится в некотором внутреннем состоянии qt и на его входе расположен символ x из A. На следующем такте в соответствии с программой он переходит в некоторое состояние q_{t+1}, и на его выход поступает символ y. Кроме того, каждый автомат может принимать специальное внутреннее состояние q_ω, которое называется *состоянием поломки* и удовлетворяет следующим требованиям:

1) в состоянии q_ω автомат поставляет на выход букву ω, затем снова принимает состояние q_ω;

2) если на вход автомата поступила буква ω, то он переходит в состояние q_ω и поставляет на выход ω.

Говорят, что автомат работает правильно, если он не переходит в состояние поломки.

Базис C состоит из 117 автоматов четырех типов *I–IV*. Автомат типа *I* обрабатывает входную последовательность. Автоматы типа *II* моделируют правила вывода *ИП*. Автоматы типа *III* и *IV* связаны с буквами алфавита A_0, и осуществляют контрольную проверку выходной последовательности.

Логической сетью над базисом C называется ориентированный граф, в вершинах которого располагаются автоматы базиса C, а ребра графа изображают соединения входных и выходных каналов автоматов, входящих в сеть. Естественным образом определяются вход и выход такой сети. *Допустимой входной последовательностью* логической сети над C называется последовательность вида: $\mu P \mu\mu ...$, где P – непустое слово алфавита A_0. Логическая сеть над C называется *правильно организованной*, если существует допустимая входная последовательность, при поступлении которой все автоматы сети работают правильно. Доказывается, что правильно организованные сети являются последовательными цепочками автоматов, составленными из блоков, изображенных на рисунке 2.

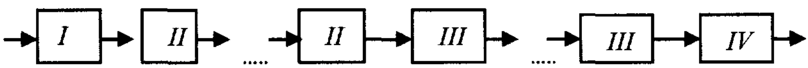

Рис. 2

Автоматы блока подключены последовательно. Первым стоит автомат типа *I*, за ним следуют несколько автоматов типа *II*, далее идут автоматы типа *III*, и в конце один автомат типа *IV*.

Теорема 1. Пусть слово T выводимо из слова P в *ИП*. Тогда существует правильно организованная логическая сеть L над C такая, что для входной последовательности $\mu P \mu\mu ...$ автоматы L работают правильно и на выход L поступает последовательность $\mu ... \mu T \mu\mu ...$, где длина приставки $\mu ... \mu$ равна длине слова T; в остальных случаях работа L не определена.

Указанная в этой теореме выходная последовательность $\mu ... \mu T \mu\mu ...$ называется *ограниченно-детерминированным оператором, реализованным сетью L и словом P*. Обозначение оператора: $\theta(P; L)$.

Теорема 2. Если L – правильно организованная сеть над C, и $\mu P \mu\mu...$ – допустимая входная последовательность, то существует автомат Мура, вычисляющий оператор $\theta(P;L)$.

Как уже отмечалось выше, для некоторого фиксированного слова P множество всевозможных операторов вида $\theta(P;L)$, (где L – логические сети над C), не является рекурсивным. Но присутствующую здесь алгоритмическую проблему можно разложить на следующие частные алгоритмические проблемы.

Сложностью правильно организованной сети L над C называется число автоматов типа *II*, входящих в эту сеть. Обозначение: $\nu(L)$.

Для данного слова P пусть $S_n(P)$ обозначает множество всевозможных операторов вида $\theta(P;L)$, где L – правильно организованные сети над C, удовлетворяющие условию: $\nu(L) \le n$. Возникают вопросы об алгоритмической разрешимости множеств $S_n(P)$, которые решаются положительно в следующем утверждении.

Теорема 3. Для любого числа n и любого слова P алфавита A_0 множество $S_n(P)$ является рекурсивным.

Тем самым, наблюдается ситуация, при которой общая неалгоритмическая проблема распалась на совокупность частных алгоритмически разрешимых проблем.

Библиографический список

1. Кратко М.И. О существовании нерекурсивных базисов конечных автоматов // Алгебра и логика. – 1964. – Т.3, №2. – С. 33–44.

2. Марков А.А. Теория алгоритмов // Труды матем. ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова. – М.Л. : Изд. АН СССР, 1954. – Т. 42.

3. Белякин Н.В. Усиление одной теоремы Мостовского // Вестник Сибирского независимого института. – Новосибирск, 2010. – №1 – С. 51–74.

Доминионы абелевых подгрупп метабелевых групп

А.И. Будкин

АлтГУ, г. Барнаул

Группа H называется n-замкнутой в классе M, если для любой группы A=gr(H, a_1,... ,a_n) из M, содержащей H и порожденной по модулю H подходящими n элементами, доминион H в A относительно M равен H.