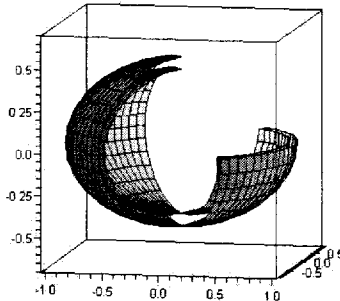


$$F = 0$$

$$G = a^2 \cos^2 u$$

$$\vec{m} = \left( -\frac{ccosucosv}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u}}, -\frac{ccosusinv}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u}} - \frac{asinu}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u}} \right)$$

$$\vec{r}^* = \left( \frac{(a\sqrt{a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u} - tc)cosucosv}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u}}, \frac{(a\sqrt{a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u} - tc)cosusinv}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u}}, \frac{(c\sqrt{a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u} - ta)sinu}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u}} \right)$$



### Библиографический список

1. Математическая энциклопедия: гл. ред. И.М. Виноградов, т. 2. – М.: Советская энциклопедия, 1979. – 1104 с.

### Об овалах Кассини

*Н.В. Никулина, М.А. Чешкова*

*АлтГу, г. Барнаул*

Овалом называется регулярная простая замкнутая плоская кривая с кривизной  $k > 0$ .

Овалом Кассини называется геометрическое место точек, произведение расстояний которых до двух данных точек F1 и F2 (фокусов)  $(F_1F_2=2b)$  есть величина равная  $a^2$ .

Уравнение овалов Кассини имеет вид [1, с. 9]:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2b^2(x^2 - y^2) = a^4 - b^4.$$

Или в полярных координатах:

$$r^4 - 2b^2r^2 \cos 2\varphi = a^2 - b^2 /$$

Покажем, что не все овалы Кассини подходят под определение овалов. Для этого исследуем формулу кривизны:

$$k = \frac{r^2 + b^2 \cos 2\varphi}{a^2 r}.$$

Замечаем, что точки перегиба ( $k = 0$ ) удовлетворяют уравнению

$$r^2 + b^2 \cos 2\varphi = 0. \quad (1)$$

Это уравнение лемнискаты Бернулли. Используя математический пакет Maple, построим эти кривые (рис. 1).

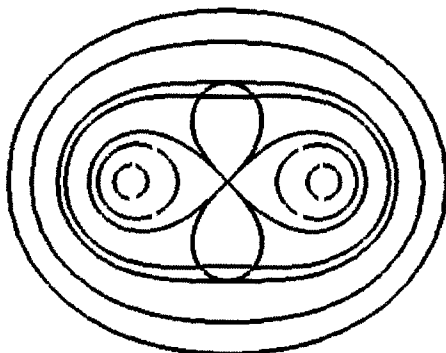


Рис. 1. Овалы Кассини

Овалы Кассини имеют точки пересечения с лемнискатой (1) (с осью Oу) либо в двух, либо в четырех точках, либо не пересекают.

Кривые Персея есть линии пересечения поверхности тора плоскостями, параллельными его оси.

Уравнение тора запишем в виде:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2).$$

Плоскость пересечения тора зададим в виде  $y = p$ . Тогда уравнение кривых Персея запишется в виде:

$$(x^2 + z^2 + p^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + p^2).$$

При  $R^2 - r^2 = 0$  уравнение примет вид:

$$(x^2 + z^2)^2 - 2R^2(x^2 - z^2) = 4R^2r^2 - R^4.$$

Кривые Персея станут овалами Кассини.

В частности при  $4r^2 - R^2 = 0$  получаем лемнискату Бернулли.

Используя математический пакет Maple, строим эти сечения (рис. 2, рис. 3).

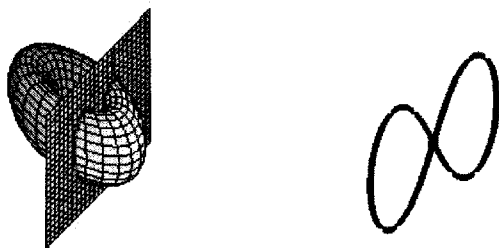


Рис. 2. Сечение тора и кривая Персея  $R = 2$ ,  $r = 1$ ,  $p = 1$

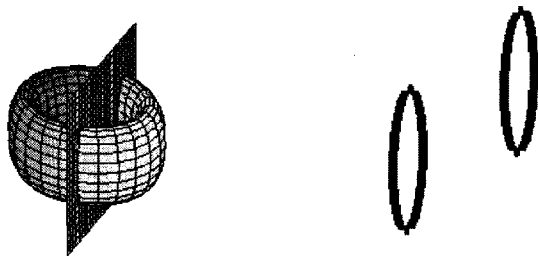


Рис. 3. Сечение тора и кривая Персея  $R = 4$ ,  $r = 1$ ,  $p = 1$

### Библиографический список

1. Савелов А.А. Плоские кривые. – М., 1960.