m-устойчивость на конечном промежутке времени

В.А. Миненко
АлтГПА, г. Барнаул

Рассматривается система $\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, \dots, x_n)$ $(i = 1, \dots, n)$, (1)

где $X_i(t, 0, \dots, 0) = 0$ $(i = 1, \dots, n)$, $X_i = X_i(t, x_1, \dots, x_n)$ и $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ $(i, j = 1, \dots, n)$ непрерывны на
$E = J \times D$ $(J = (\underline{t_0}, +\infty), D = \{(x_1, \dots, x_n): |x_k| < H \ (k = 1, \dots, m)\})$.

Зададим определенно положительную функцию $V = V(t, x_1, \dots, x_n)$, $t_0 \in (\underline{t}, +\infty), \rho > 0$. Символом $N_{V_\rho}(t_0)$ обозначим множество точек $(x_1, \dots, x_n)$, для которых первые m координат совпадают с первыми m координатами хотя бы одной точки, принадлежащей множеству решений неравенства $V(t_0, x_1, \dots, x_n) \le \rho$.

Определение 1. Нулевое решение системы (1) называется m-устойчивым при данном t_0 по отношению к положительно определенной функции $V(t, x_1, \dots, x_n)$ на промежутке $[t_0, t_0 + \tau)$, если для любого достаточно малого числа ρ для любого решения $x_i = x_i(t)$ $(i = 1, \dots, n)$ системы (1), для которого $V(t_0, x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) \le \rho$, выполняется $(x_1(t), \dots, x_n(t)) \in N_{V_\rho}(t)$ при $t \in [t_0, t_0 + \tau)$.

Определение 2. Нулевое решение системы (1) называется m-устойчивым на конечном промежутке при данном t_0 по отношению к положительно определенной функции $V(t, x_1, \dots, x_n)$, если существует положительное число τ такое, что нулевое решение системы (1) является m-устойчивым при данном t_0 по отношению функции $V(t, x_1, \dots, x_n)$ на промежутке $[t_0, t_0 + \tau)$.

Для положительно определенной функции $V(t, x_1, \dots, x_n)$ рассмотрим функцию $W = W(t, x_1, \dots, x_n)$, для которой множество решений $V(t, x_1, \dots, x_n) \le \rho$ включается во множество решений $W(t, x_1, \dots, x_n) \le \rho$ при достаточно малых ρ и $N_{W_\rho}(t) = N_{V_\rho}(t)$.

Теорема. *Если для положительно определенной функции $V(t, x_1, \dots, x_n)$, существует положительно определенная функция*

$W(t, x_1, \dots, x_n)$ такая, что $\frac{dW(t, x_1, \dots, x_n)}{dt} < 0$ при $t = t_0$, то нулевое решение т-устойчиво на конечном промежутке для t_0 по отношению к $V(t, x_1, \dots, x_n)$.

Динамика сферического слоя жидкости: методы численного исследования

Резанова Е.В.

Алтайский государственный университет

Изучается задача о динамике сферической жидкой оболочки, включающей в себя газовый пузырек. Полагается, что жидкость с растворенным в ней газом есть несжимаемая вязкая жидкость. Математическая модель динамики жидкого слоя и процесса диффузии газа в нем включает систему уравнений Навье-Стокса, уравнение диффузии, кинематические и динамические условия на свободных границах и закон Генри. Движение возникает из заданного начального состояния. Внутри пузырька считается выполненным уравнение Менделеева-Клапейрона, масса газа определяется диффузионным потоком через границу. Коэффициенты переноса, поверхностного натяжения и множитель в законе Генри зависят от температуры. При этом полагается, что температура всей системы определяется температурой внешней среды, зависящей только от времени.

При решении задачи, ограничившись рассмотрением сферически симметричного процесса, требуется найти функций $R_1(t)$ и $R_2(t)$ (внутренняя и внешняя границы сферического слоя), $V(t)$ (составляющая радиальной скорости v, $v=r^{-2}*V(t)$), $C(t,r)$ (концентрации газа как пассивной примеси). Начально-краевая задача в безразмерных переменных имеет следующий вид:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}V^2\left(R_2^2 + R_1^2\right)\left(R_2 + R_1\right)R_2^{-3}R_1^{-3} + \rho^{-1}\,\mathrm{Re}^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left[P_g' - P_{vn}' - 2\overline{Si}\,\sigma(T)\left(R_2 + R_1\right)R_2^{-1}R_1^{-1}\right]\cdot R_2R_1\left(R_2 - R_1\right)^{-1} -$$

$$-4\,\mathrm{Re}^{-1}\nu(T)V\left(R_2^2 + R_2R_1 + R_1^2\right)R_2^{-2}R_1^{-2}, \quad t > 0; \quad V(0) = V_0;$$

$$\frac{dR_1}{dt} = VR_1^{-2},\ R_2(t) = \left(R_{20}^3 - R_{10}^3 + R_1^3(t)\right)^{1/3},\ t > 0;\ R_1(0) = R_{10},\ R_2(0) = R_{20};$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(r^2C\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(Pe_d^{-1}r^2D(T)\frac{\partial C}{\partial r} - VC\right), \quad t > 0, \quad R_1 < r < R_2;$$