– Создан программный комплекс, направленный на оценку параметров обобщенной модели Виноградова-Покровского на основе экспериментальных данных, с целью последующего использования найденных значений для расчета различных характеристик полимерной жидкости. Проведен ряд сопоставлений теоретических характеристик полимерной жидкости с данными, полученными в ходе эксперимента;

– Найдены численные зависимости составляющих тензора напряжений и продольной скорости от градиента давления и расстояния до стенки. Проведено исследование точности теоретических зависимостей распределения продольной скорости для различных значений удельного расхода, найденных с помощью приближенного аналитического и точного численного решения. Показано, что теоретические зависимости, найденные численным решением, хорошо согласуются с экспериментальными данными, при этом аналитическое решение приводит к отклонению теоретических зависимостей от экспериментальных. Тем самым найдена причина отсутствия стационарных решений полной гидродинамической задачи при использовании аналитических выражений в качестве граничных условий на выходе из канала при расчетах двухмерных течений.

– На основе численного решения найдено отношение градиента давления на входе в резервуар к градиенту давления на выходе при различных значениях ширины канала. Согласованы при заданном расходе значения компонентов тензора напряжения и продольной скорости. Полученные при численном решении соотношения могут быть использованы при адаптации численных методов двух- и трехмерных течений в качестве граничных условий для давления при решении полной гидродинамической задачи, а также начального приближения входного и выходного профилей и при моделировании течений полимерных жидкостей в зазоре между параллельными плоскостями, например, при формовании тонких пленок.

УДК 554.27

Фильтрация двух вязких сжимаемых жидкостей в пористой среде

И.Г. Ахмерова
АлтГУ, г. Барнаул

В докладе рассматриваются локальная разрешимость задачи фильтрации для уравнений одномерного нестационарного движения теплопроводной двухфазной смеси. В случае постоянства истинных плотностей фаз и малости вязкости и ускорения второй фазы установлена разрешимость «в целом» по времени и сходимость при неограниченном росте времени решения нестационарной задачи к решению стационарной. Для движения вязкой теплопроводного двухфазной смеси в не деформируемой пористой среде, система уравнений имеет вид [1]:

$$\frac{\partial(\rho_1^0 \overline{m} s)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_1^0 \overline{m} s v_1)}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial(\rho_2^0 \overline{m}(1-s))}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_2^0 \overline{m}(1-s)v_2)}{\partial x}=0, \qquad (1)$$

$$\rho_1^0 \overline{m} s\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)=-\frac{\partial(\overline{m} s p_1)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_1(s)\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)+F+\rho_1^0 \overline{m} s g, \qquad (2)$$

$$\rho_2^0 \overline{m}(1-s)\left(\frac{\partial v_2}{\partial t}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)=-\frac{\partial(\overline{m}(1-s)p_2)}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_2(s)\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)-F+\rho_2^0 \overline{m}(1-s)g, \qquad (2)$$

$$F=B(s)(v_2-v_1)+p_2\frac{\partial \overline{m} s}{\partial x}, \quad p_1-p_2=p_c(s,\theta), \quad p_2=R\rho_2^0\theta, \qquad (4)$$

$$c_1\rho_1^0 \overline{m} s\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+v_1\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)+c_2\rho_2^0 \overline{m}(1-s)\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+v_2\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(\chi(s)\frac{\partial\theta}{\partial x}). \qquad (3)$$

Система рассматривается в области $(x,t)\in Q_T=\Omega\times(0,T)$, $\Omega=(0,1)$, при краевых и начальных условиях ($i=1,2$)

$$\begin{aligned} &v_i|_{x=0,x=1}=0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial x}|_{x=0,x=1}=0, \quad v_i|_{t=0}=v_i^0(x), \\ &p_2|_{t=0}=p^0(x), \quad \theta|_{t=0}=\theta^0(x), \quad s|_{t=0}=s^0(x). \end{aligned} \qquad (4)$$

Здесь $\overline{m}$, ρ_i^0, v_i – соответственно пористость, истинная плотность и скорость i-ой фазы ($i=1$ – жидкость, $i=2$ – газ), s – фазовая насыщенность жидкостью порового пространства, θ – абсолютная температура смеси, p_1 – эффективное давление жидкости, p_2 - внутреннее давление газа, g – плотность массовых сил, $c_i=const>0$ теплоемкость при постоянном объеме, $R=const>0$ – универсальная газовая постоянная; кроме того, $\mu_i(s)$ – вязкости фаз, $B(s)$ – коэффициент взаимодействия фаз, $\chi(s)$ – коэффициент теплопроводности смеси, $p_c(s,\theta)$ – разность давлений (заданные функции). Задача записана в эйлеровых координатах x, t. Истинная плотность жидкости ρ_1^0 принимается постоянной. Искомыми являются величины s, θ, ρ_2^0, v_i, p_i, $i=1,2$. Следует также отметить, что наличие $\overline{m}$ не вносит никаких принципиальных трудностей в дальнейшие исследования, если $\overline{m}(x)$ – достаточно гладкая функция [2]. Поэтому для краткости ограничимся случаем $\overline{m}=const>0$. Более того, после очевидных преобразований можно считать $\overline{m}=1$. Локальная по времени разрешимость задачи (1)-(6) при дополнительных условиях малой вязкости и ускорения второй фазы (в уравнении (3) соответствующие слагаемые отбрасываются) установлена в работе [2]. При этих же предположениях, а так же при условиях $p_1=p_2$, $\theta=const$, $\rho_i^0=const$, $\mu_i=const$, $i=1,2$, установлена локальная разрешимость задачи Коши [3].

Система (1)–(5) близка по структуре системе уравнений вязкого газа [4, гл. 2] с зависящей от плотности вязкостью [6]. Особенностью задачи (1)–(6) является наличие двух скоростей v_1 и v_2, а также необходимость обоснования физического принципа максимума для насыщенности s вида $0\le s\le 1$ и для истинной плотности газа: $0<\rho_2^0<\infty$.

В настоящей работе доказана локальная разрешимость задачи (1)-(6) в случае когда ρ_2^0 – функция давления и температуры, а $\rho_1^0=const$. В предположениях работы [4] установлена разрешимость «в целом» и стабилизация решения. Сформулируем основной результат.

Определение 1. Обобщенным решением задачи (1)-(6) называется совокупность функций $(s(x,t),\rho_2^0(x,t),v_i(x,t),p_i(x,t),\theta(x,t))$, $i=1,2$ из пространств

$(s,\rho_2^0)\in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))$, $(v_i,\theta)\in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_2(0,T;W_2^2(\Omega))$,

$(\frac{\partial s}{\partial t},\frac{\partial \rho_2^0}{\partial t})\in L_2(Q_T)$, $(\frac{\partial v_i}{\partial t},\frac{\partial \theta}{\partial t},\frac{\partial p_i}{\partial x})\in L_2(Q_T)$ удовлетворяющие уравнениям (1)–(5) и неравенствам $0<s<1, 0<\rho_2^0<\infty$ почти всюду в Q_T и принимающих заданные граничные и начальные значения в смысле следов функций из указанных классов.

Теорема 1. Пусть данные задачи (1)-(6) подчиняются следующим условиям гладкости: $(v_i^0, \theta^0, s^0, \rho_2^0) \in W_2^1(\Omega)$, $g \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ и условия согласования $v_i^0 |_{x=0,x=1} = 0, i=1,2$. Пусть функции $\mu_1(s)$, $\mu_2(s)$, $B(s)$, $p_c(s,\theta)$, $\chi(s)$ и их производные до второго порядка непрерывны для $s \in (0,1)$ и удовлетворяют условиям:

$k_0^{-1} s^{q_1} (1-s)^{q_2} \le \mu_1(s) \le k_0 s^{q_3} (1-s)^{q_4}$, $|(\mu_1(s))'_s| \le k_0 s^{q_5} (1-s)^{q_6}$,

$k_0^{-1} s^{q_7} (1-s)^{q_8} \le \mu_2(s) \le k_0 s^{q_9} (1-s)^{q_{10}}$, $|(\mu_2(s))'_s| \le k_0 s^{q_{11}} (1-s)^{q_{12}}$,

$k_0^{-1} s^{q_{13}} (1-s)^{q_{14}} |\theta|^{q_{15}} \le p_c(s,\theta) \le k_0 s^{q_{16}} (1-s)^{q_{17}} |\theta|^{q_{18}}$,

$|(p_c(s,\theta))'_s| \le k_0 s^{q_{19}} (1-s)^{q_{20}} |\theta|^{q_{21}}$,

$k_0^{-1} s^{q_{22}} (1-s)^{q_{23}} \le \chi(s) \le k_0 s^{q_{24}} (1-s)^{q_{25}}$, $|(\chi(s))'_s| \le k_0 s^{q_{26}} (1-s)^{q_{27}}$,

$k_0^{-1} s^{q_{28}} (1-s)^{q_{29}} \le B(s) \le k_0 s^{q_{30}} (1-s)^{q_{31}}$,

где $k_0 = const > 0$, $q_1, \ldots, q_{31}$ – фиксированные вещественные параметры. Если выполнены условия $0 < m_0 \le s^0(x) \le M_0 < 1$, $0 < m_1 \le p^0(x), \theta^0(x) \le M_1 < \infty$, $x \in \overline{\Omega}$, где m_0, M_0, m_1, M_1 – известные положительные постоянные, то найдется достаточно малое значение $t_0 \in (0,T)$, такое что для всех $t \le t_0$ существует обобщенное решение $(s(x,t)$, $\rho_2^0(x,t)$, $v_i(x,t)$, $p_i(x,t)$, $\theta(x,t))$ задачи (1)-(6).

В случае $\rho_i^0 = const > 0$, $i = 1,2$ уравнение состояния $p_2 = p_2(\rho_2^0, \theta)$ не используется и давление p_2 является искомой функцией. Вместо системы (1)–(5) после обезразмеривания получим:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial (s v_1)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial (1-s)}{\partial t} + \frac{\partial ((1-s) v_2)}{\partial x} = 0, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} sFr\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x}\right) &= -s\frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{\partial (s p_c)}{\partial x} + \\ &+ \frac{Fr}{Re}\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\mu}_1(s)\frac{\partial v_1}{\partial x}\right) + B(v_2 - v_1) + sn, \end{aligned} \tag{8}$$

$$0 = -(1-s)\frac{\partial p_2}{\partial x} + B(v_1 - v_2), \quad p_1 = p_2 + p_c, \tag{9}$$

$$s\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+v_1\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\chi}(s)\frac{\partial\theta}{\partial x}), \tag{10}$$

замкнутой относительно неизвестных функций s, v_i, p_i, θ, $i=1,2$, удовлетворяющих краевым и начальным условиям

$$\begin{gathered} v_i|_{x=0,x=1}=0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial x}|_{x=0,x=1}=0, \quad v_i|_{t=0}=v_i^0(x), \\ p_2|_{t=0}=p^0(x), \quad \theta|_{t=0}=\theta^0(x), \quad s|_{t=0}=s^0(x). \end{gathered} \tag{11}$$

Следует отметить, что стационарным решение задачи (7)–(11) при $g=0, p_c=0$ является набор постоянных $v_1=v_2=0$, $s=const\in(0,1)$, $\theta=const>0$.

Обобщенное решение задачи (8)–(12) понимается в смысле определения 1, в котором нужно положить $\rho_2^0=const>0$. Для задачи (8)–(12) установлена разрешимость «в целом» по времени в классе сильных решений нестационарной неизотермической одномерной начально-краевой задачи о движении смеси твердых частиц и несжимаемого газа с непостоянной вязкостью фаз, а так же доказана сходимость при неограниченном росте времени решения нестационарной задачи с постоянной вязкостью к решению стационарной [3].

Библиографический список

1. Ведерников В.В., Николаевский В.Н. Уравнения механики пористых сред, насыщенных двухфазной жидкостью // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1978. – №5.

2. Папин А.А. О локальной разрешимости краевой задачи тепловой двухфазной фильтрации // Сиб. журн. индустр. математики. – Новосибирск, 2009.– Т. 12, №1(37).

3. Papin A.A., Akhmerova I.G., Solvability of the system of equations of one-dimensional motion of a heat-conducting two-phase mixture // Mathematical Notes. 87(2010), 2, 230–243.

4. Göz M. Existence and uniqueness of time-dependent spatially periodic solutions of fluidized bed equations // ZAMM.Z.angew. Math.Mech. 71:6 1991. P. 750–751.

5. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983.

6. Канель Я.И. Об одной модельной системе уравнений одномерного движения газа // Дифферен. уравнения. – 1968. – Т. 4, №4. – С. 721–734.