УДК 532.5

Математическое моделирование процессов диффузии и теплопереноса в газосодержащей оболочке

А.В. Закурдаева, Е.В. Резанова
АлтГУ, г. Барнаул

В работе исследуется задача о динамике жидкой оболочки, содержащей газовый пузырек, и процессов диффузии и теплопереноса в ней (см. рис. 1). Условия кратковременной невесомости позволяют рассматривать сферически симметричный процесс. Оболочка представляет собой вязкую несжимаемую жидкость с растворенным в ней газом – «пассивной» добавкой. Движение возникает из заданного начального состояния. В качестве математической модели используется система уравнений Навье-Стокса, переноса тепла и диффузии [1, 2]. Данная система служит для определения основных функций, характеризующих динамику оболочки: свободных границ $R_1(t)$, $R_2(t)$ и радиальной скорости $v(t,r)$, а также для определения температуры жидкости $T(t,r)$ и концентрации примеси $C(t,r)$).

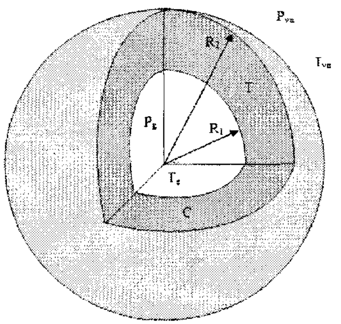

Рис. 1. Геометрия области течения

На границах сферического слоя должны быть выполнены кинематические и динамические условия, соотношение, определяющее баланс энергии на внутренней границе, условие теплообмена с внешней средой на внешней границе, а также условия, выражающие связь концентрации газа на границе области с давлением вне ее (закон Генри). Параметры газа должны определяться внутри пузырька и на его границе. Считается, что давление P_g, плотность ρ_g и абсолютная температура T_g в газе являются функциями только времени, связанными уравнением Менделеева-Клапейрона. Учитывается также зависимость всех коэффициентов переноса и множителя в законе Генри от температуры [1–3].

Для проведения численного исследования осуществляется переход к постановке задачи в безразмерной форме. Система уравнений в безразмерном виде записывается следующим образом:

$$ShV'\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)-\frac{1}{2}V^2\left(\frac{1}{R_1^4}-\frac{1}{R_2^4}\right)+12\frac{V(t)}{\mathrm{Re}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\nu(T)}{r^4}dr=$$

$$-Eu\rho^{-1}\left[P_{vn}-P_g+2Si\left(\frac{\sigma|_{R_2}}{R_2}+\frac{\sigma|_{R_1}}{R_1}\right)\right],$$

$$ShT_t+\mathrm{v}\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{1}{Pe}r^{-2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\chi(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right)+2\frac{1}{S}\frac{P_*}{c_1T_*\rho_*}\nu(T)\left[\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial r}\right)^2+2\left(\frac{\mathrm{v}}{r}\right)^2\right],$$

$$ShC_t+\mathrm{v}\frac{\partial C}{\partial r}=\frac{1}{Pe_d}r^{-2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2D(T)\frac{\partial C}{\partial r}\right).$$

Здесь $V(t)$ $\left(\mathrm{v}(t,r)=r^{-2}\cdot V(t)\right)$ – скорость изменения объема оболочки; $Sh=\dfrac{r_*}{t_*\mathrm{v}_*}$ – число Струхала; $\mathrm{Re}=\dfrac{\mathrm{v}_*r_*}{\nu_*}$ – число Рейнольдса; $Eu=\dfrac{P_*}{\rho_*\mathrm{v}_*^2}$ – число Эйлера; $Pe=\dfrac{r_*\mathrm{v}_*}{\chi_*}$ – число Пекле; $Pe_d=\dfrac{r_*\mathrm{v}_*}{\mathrm{D}_*}$ – число Пекле диффузионное. Также возникли следующие безразмерные параметры: $Si=\dfrac{\sigma_*}{r_*P_*}$, $S=\dfrac{r_*P_*}{\rho_*\nu_*\mathrm{v}_*}$.

Переход к новой пространственной переменной $x=\left(r^3-R_1^3\right)\left(R_{20}^3-R_{10}^3\right)^{-1}$ на каждом временном шаге позволяет осуществлять расчеты температуры жидкости и концентрации газа в оболочке, оставаясь в области $[0,1]$ с фиксированными границами.

Численно исследуются две задачи: квазиизотермическая модель [2, 4], когда диффузионные процессы считаются преобладающими, а температура всей системы равна температуре внешней среды и зависит только от времени, а также тепловая модель [3, 4], когда изучается процесс теплопереноса в оболочке, определяемый условиями теплообмена с внешней средой, и исследуются его влияние на динамику оболочки. Для численного решения уравнений переноса тепла и примеси строится неявная разностная схема второго порядка аппроксимации по пространственной переменной. Для нахождения значений внутреннего радиуса оболочки и скорости изменения объема используется метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В диффузионном приближении задачи в систему включается и уравнение, определяющее плотность газа в пузырьке, для тепловой задачи эта функция вычисляется, исходя из предположения о неизменности массы газа внутри пузырька.

В ходе проведения численных экспериментов были исследованы зависимость динамики сферической оболочки и процесса диффузии в ней от внешнего давления, количества газа в пузырьке и температуры внешней среды. Расчеты проведены для системы «жидкое стекло - углекислый газ».

Авторы выражают искреннюю благодарность О.Н. Гончаровой за обсуждение постановок задач, методов исследования, результатов работы и постоянное внимание к работе.

Работа выполнена в рамках проекта № 7.3975.2011 Алтайского государственного университета (поддержан Министерством образования и науки РФ) и программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» на 2012-2016 годы «Развитие Алтайского государственного университета в целях модернизации экономики и социальной сферы Алтайского края и регионов Сибири, мероприятие «Конкурс грантов» (№2013.312.1.66).

Библиографический список

1. Гончарова О.Н. Математическая модель формирования сферических микробаллонов в условиях кратковременной невесомости // Динамика сплошной среды / АН СССР Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. – Новосибирск, 1987. – Вып. 82. – С. 66–79.

2. Гончарова О.Н. Диффузионное приближение в задаче формирования сферических микробаллонов в условиях кратковременной невесомости // Моделирование в механике / АН СССР Сиб. отд-ние. Ин-т теоретической и прикладной механики. – Новосибирк, 1990. – Т. 4 (21), №5. – С. 83–95.

3. Гончарова О.Н. Глобальная разрешимость задачи о формировании сферических микробаллонов // Вычислительные методы прикладной гидродинамики / Сибирское отделение РАН. Ин-т гидродинамики. – Новосибирск, 1993. – Вып. 106. – С. 36–48.

4. Гончарова О.Н., Закурдаева А.В., Резанова Е.В. Моделирование динамики и процессов тепло- и массопереноса в сферическом слое жидкости со свободными границами // XVIII Зимняя школа по механике сплошных сред : тезисы докладов. 18-22 февраля 2013 г. – Пермь - Екатеринбург, 2013. – С. 103.