ва А меньше ε, называется ε — окрестностью множества А, и обозначается так: U_εA.

Теорема 1. Если $\{M_\alpha\}$ – семейство непустых множеств из R^n, где α пробегает некоторое множество действительных чисел, то $\cup_\alpha U_\varepsilon M_\alpha = U_\varepsilon \cup_\alpha M_\alpha$.

Теорема 2. Если К – непустое, компактное множество в R^n, К $\subset D$, где D – открытое, ограниченное множество, то расстояния точек множества К до границы множества D больше некоторого положительного числа.

Рассматривается система

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, \ldots, x_n) \; (i = 1, \ldots, n),$$

где $X_i = X_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ и $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}(i, j = 1, \ldots, n)$ непрерывны на $E = I \times D$ $(I = (\underline{t}, +\infty); D$ — область в $R^n)$.

Или в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x).$$

Пусть $x = x(t, x_0, t_0)$ – решение системы, для которого $x(t_0, x_0, t_0) = x_0$, $x_0 \in M$, где М $\subset D$, $t_0 \in I$, определено на $[t_0, t_0 + T]$; $t' \in [t_0, t_0 + T]$. Тогда через $M_{t'}$ обозначим множество $\{x(t', x_0, t_0): x_0 \in M\}$.

Теорема 3. Если множество M компактно, то $\cup_{t'} M_{t'}$, где $t' \in [t_0, t_0 + T]$, компактно.

УДК 517.96

Проблема существования решения задачи для уравнения Пуассона

Г.А. Павлов, Н.А. Абакумова

АГАУ, г. Барнаул

В плоском случае рассматривается задача определения правой части уравнения Пуассона. Приведены примеры неединственности решения задачи, а также теоремы существования решения. В случае уравнения Гельмгольца подобная задача рассматривалась в работах [1, 2] а также в монографии [3, с. 651, с. 675, с. 676].

Пусть $T \subset R^2$, $T \in C^{1,\lambda}$ (за исключением быть может отдельных точек).

$$\Delta U(x,y) = f(x,y)\,\varphi(x), (x,y) \in T \qquad (1)$$

Поставим задачу определения функции ϕ, если выполнены условия

$$U / \partial T = \psi, U / \gamma = k, \qquad (2)$$

где $\gamma \subset T$ кривая $y = \theta(x), a \le x \le b$, причем $[a,b]$ есть проекция T на ось x, $f \in C^{\lambda}(\overline{T})$, ∂T – граница T.

Вначале покажем, что задача имеет, вообще говоря, неединственное решение. Легко проверить, что если функция f знакопеременная, то решение задачи определяется неединственным образом.

Пример 1. Пусть $T = [0,\pi]\times[0,2\pi], |a| \le 1$,

$$f(y) = (a + 2\sin(y - \arcsin a)),$$

U удовлетворяет уравнению (1), условиям (2), $\psi = k = 0$, γ – прямая $y = \pi + 2\arcsin a$.

Тогда наряду $\phi = 0$ данному уравнению удовлетворяет $\phi(x) = \sin x$ (решение $U = -\sin x(a + \sin(y - \arcsin a))$).

Итак, условие $f(x, y) > 0$ является в некотором смысле необходимым условием. Заметим, что если вместо условия $U / \gamma = 0$, будем рассматривать условие: нормальное производное на ней равно нулю, то условие $f(x, y) > 0$ уже не будет достаточным.

Пример 2. $T = [0,\pi]\times\left[\pi/3, 2\pi/3\right]$, $f(y) = \sin y - 1/4$,

$$U / \partial T = \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Здесь наряду с $\phi = 0$, задаче удовлетворяет $\phi(x) = \sin x$ (решение $U = (1/2 - \sin y)\sin x/2)$).

Следующий пример, хотя и не относится к уравнению Пуассона, но по видимому, подстерегает нас, что условие $f(x, y) > 0$ явно является недостаточным для однозначного определения $\varphi(x)$.

Пример 3. Пусть $\Delta U(x,y) + \lambda U(x,y) = (2 + \sin y)\,\varphi(x)$, где

$$\tfrac{5}{3} \le \lambda < 2 \text{ или } 2 < \lambda \le 3 \text{ произвольное число.}$$

$$T = [0, \pi] \times \left[\arcsin\left(\frac{2(2-\lambda)}{\lambda - 1} \right), 2\pi + \arcsin\left(\frac{2(2-\lambda)}{\lambda - 1} \right) \right]$$

$$U / \partial T = U\Big|_{y = \pi + \arcsin\left(\frac{2(2-\lambda)}{\lambda-1}\right)} = 0 .$$

Здесь наряду с $\phi = 0$ есть решение $\phi(x) = \sin x$ (решение

$$U(x, y) = -2\sin x \Big/ \left((\lambda - 1) + \sin x \frac{\sin y}{\lambda - 2} \right)).$$

В примере 3 наиболее интересный случай, когда λ не является собственным значением оператора Лапласа Δ. Интересно рассмотреть случай $\lambda = 2$. Перейдем к изучению задачи. Отметим вначале, что если $U(x, y)$ (заданная функция) достаточно гладкая, то заменой переменной $U(x, y) = f(x, y)\, v(x, y)$ уравнение (1) можно свести к эллиптическому уравнению второго порядка с коэффициентами зависящими от x, y, где в правой части будет стоять уже функция $f(x, y) = 1$ задача определения правой части ϕ будет неединственная. Заметим, что уравнение в этом случае может быть записано в виде

$$\Delta v + k_1(x, y) v_x + k(x, y) v_y + \left(\frac{\Delta f(x, y)}{f(x, y)} \right) v = \phi(x) .$$

И для того, чтобы для этого уравнения соблюдался принцип максимума, необходимо, в случае $f > 0$, чтобы f была супергармонической функцией.

В связи с этим, возникает гипотеза, если $f > 0$ супергармоническая функция, то задача определения ϕ , возможно, не может иметь больше одного решения.

Выпишем эллиптическое уравнение общего вида, с достаточно гладкими коэффициентами, для которого справедлив принцип максимума, где задача определения правой части $\phi(x)$ с $f = 1$ имеет не более одного решения. В общем в виде:

$$a_1(x, y) U_{yy} + a_2(x, y) U_{xy} + a_3(x) U_{xx} + b_1(x, y) U_y + \\ + b_2(x) U_x + c(x) U = \phi(x) . \qquad (3)$$

Действительно, в этом случае решение можно записать в виде

$$U(x, y) = \Phi(x) + h(x, y), \qquad (4)$$

где h – решение однородного уравнения, а Φ удовлетворяет для $x \in [a,b]$ уравнению

$$a_3(x)\Phi'' + b_2(x)\Phi' + c(x)\Phi = \phi(x),$$
$$\Phi(a) = \Phi'(a) = 0. \qquad (5)$$

Тогда $h(a,y)=0, (a,y) \in \partial T$

и кроме того

$$h(x,y)\big|_{\partial T} = h(x,y)\big|_{\gamma} = -\Phi(x),$$

то есть функция h достигает максимума (минимума) и на γ и он очевидно, если $h(x,y) \neq 0$ больше нуля, откуда получаем противоречие.

Рассмотрим теперь уравнение (1) с $f=1$, $T \in C^{2,\lambda}$ и покажем, что решение задачи существует (задача нахождения ϕ). Не теряя общности, можно считать $\psi = 0$.

Предположим, что $\theta \in C^{2,\lambda}, k \in C^{2,\lambda}, T \in C^{2,\lambda}$.

Лемма. Существует единственное решение задачи правой части $\phi \in C^{\lambda}[a,b]$, при этом обратное отображение $(0,k) \to \phi$ является ограниченным оператором из $C^{2,\lambda} \to C^{\lambda}$

Замечание 1. Решение задачи можно искать в другом виде. Заметим, что так как $U(x,y)=0, (x,y) \in \partial T$, то

$$U(x,y) = \int_T \phi(\tau)\Im(x,y,\tau,v)\,d\tau\,dv.$$

Откуда для нахождения $\phi(x)$ получаем уравнение, эквивалентное задачи

$$\int_T \phi(\tau)\Im(x,\theta(x),\tau,v)\,d\tau\,dv = k(x).$$

Из леммы вытекает, что существует ограниченный оператор из $C^{2,\lambda} \to C^{\lambda}$ такой, что $\phi(x) = \Re_k(x)$.

Рассмотрим произвольную функцию $\rho(x)$, $a \le x \le b$, $\rho \in C^{\lambda}[a,b]$ и обозначим $\delta = |f(x,y) - \rho(x)|_{C^{\lambda}(\bar{T})}$, $\rho(x) \ge a_0 > 0$.

Теорема. Пусть $T \in C^{2,\lambda}, f \in C^{\lambda}(\bar{T})$, $\rho \in C^{\lambda}$, $\psi = 0$.

Тогда существует такое число $\delta(T,a_0)$, что для всех $\delta < \delta(T,a_0)$ для любой заданной функции *f*, найдется единственная функция $\phi \in C^{\lambda}[a,b]$, удовлетворяющая условию (1).

Замечание 2. Отметим, что если вместо уравнения (1) рассмотрим уравнение $\Delta U(x, y) = \Delta(f(x,y)\phi(x))$, где f – заданная функция, $f(x,y) > 0$, $(x,y) \in \overline{T}$, $f \in C^{2,\lambda}(\overline{T})$, f – супергармоническая функция, то задача определения функции ϕ при условиях $\phi(a) = \alpha$, $\phi(b) = \beta$ имеет не более одного решения.

В случае $f = 1$, когда $T = [0,a]\times[0,d]$ решение задачи легко получить методом разделения переменных.

Замечание 3. К рассмотренной задаче может быть сведена задача о единственности определения коэффициента $\alpha(x)$ при уравнении

$$\Delta U(x,y) + \alpha(x)U(x,y) = f(x,y).$$

Для этой задачи имеют место аналогичные примеры неоднозначного определения $\alpha(x)$.

Библиографический список

1. Запреев А.С. Теорема единственности решения плоской обратной задачи для уравнения Гельмгольца // Некорректные математические задачи и проблемы геофизики. – Новосибирск, 1976. – С. 46–63.

2. Запреев А.С., Цецохо В.А. Обратная задача для уравнения Гельмгольца. – Новосибирск, 1976. – 18 с. (Препринт / АН СССР. Сиб. Отд-не. ВЦ; №22).

3. Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Теория операторов и некорректные задачи. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. – 702 с.

УДК 517.96

Некоторые проблемы обратной задачи теории потенциала

Г.А. Павлов, М.В. Кокшарова

АГАУ, г. Барнаул

В статье приведены классы областей и плотностей, при которых задача имеет единственное решение, а также примеры неединственности решения обратной задачи.

Обозначим: R^m – множество m-мерных векторов с обычным расстоянием; T – односвязная жорданова область; ∂T – граница множества T; n – внешняя единичная нормаль (к ∂T); L – эллиптический оператор; ν– внешняя конормаль оператора L;