Замечание 2. Отметим, что если вместо уравнения (1) рассмотрим уравнение $\Delta U(x, y) = \Delta(f(x,y)\phi(x))$, где f – заданная функция, $f(x,y) > 0$, $(x,y) \in \overline{T}$, $f \in C^{2,\lambda}(\overline{T})$, f – супергармоническая функция, то задача определения функции ϕ при условиях $\phi(a) = \alpha$, $\phi(b) = \beta$ имеет не более одного решения.

В случае $f = 1$, когда $T = [0,a] \times [0,d]$ решение задачи легко получить методом разделения переменных.

Замечание 3. К рассмотренной задаче может быть сведена задача о единственности определения коэффициента $\alpha(x)$ при уравнении

$$\Delta U(x,y) + \alpha(x)U(x,y) = f(x,y).$$

Для этой задачи имеют место аналогичные примеры неоднозначного определения $\alpha(x)$.

Библиографический список

1. Запреев А.С. Теорема единственности решения плоской обратной задачи для уравнения Гельмгольца // Некорректные математические задачи и проблемы геофизики. – Новосибирск, 1976. – С. 46–63.

2. Запреев А.С., Цецохо В.А. Обратная задача для уравнения Гельмгольца. – Новосибирск, 1976. – 18 с. (Препринт / АН СССР. Сиб. Отд-не. ВЦ; №22).

3. Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Теория операторов и некорректные задачи. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. – 702 с.

УДК 517.96

Некоторые проблемы обратной задачи теории потенциала

Г.А. Павлов, М.В. Кокшарова

АГАУ, г. Барнаул

В статье приведены классы областей и плотностей, при которых задача имеет единственное решение, а также примеры неединственности решения обратной задачи.

Обозначим: R^m – множество m-мерных векторов с обычным расстоянием; T – односвязная жорданова область; ∂T – граница множества T; n – внешняя единичная нормаль (к ∂T); L – эллиптический оператор; ν– внешняя конормаль оператора L;

$\Omega(x,y)$ – (главное) фундаментальное решение или функция Грина некоторой конечной гладкой области $D < R^m$ оператора L; $\tilde{T}$ – минимальное множество, содержащее T, все компоненты которого – односвязные множества;

$U(x;\mu,T) = \int\limits_T \Omega(x,y)d\mu(y), x \notin \tilde{T}$ – внешний потенциал конечного множества T знакопеременной, вообще говоря, меры μ; в дальнейшем, если мера μ имеет плотность, то её будем отождествлять с мерой;

$V(x;\mu,\partial T) = \int\limits_{\partial T} \Omega(x,y)\mu(y)ds(y), x \notin \tilde{T}$ внешний потенциал простого слоя;

$$U(x;\theta,\upsilon,\mu,T_1,T_2,T_3) = U(x;\mu,T_1) + V(x;\upsilon,\partial T_1) + \int\limits_{\partial T} \theta(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\Omega(x,y)ds(y), x \notin \tilde{T}_1 \cup \tilde{T}_2 \cup \tilde{T}_3$$

при этом, если $T_1 = T_2 = T_3$, то $U(x;\theta,\upsilon,\mu,T_1,T_2,T_3)$ будем обозначать как $U(x;\theta,\upsilon,\mu,T_1)$;

Рассмотрим результат, поясняющий сложность проблемы единственности решения задачи определения области. Будем считать, что $L = -\Delta$; T_1, T_2 –жордановы области; $\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 \neq \varnothing$ есть конечная совокупность жордановых областей $T_1 \backslash T_2$, $T_2 \backslash \bar{T}_1$, и они не пустые; состоят из конечного числа компонент такие, что задача Дирихле устойчива в T_1, T_2. Определим множество A положительных бесконечно-дифференцируемых функций в окрестности T_1, T_2 и таких, что $\int\limits_{T_1 \backslash \bar{T}_2} \mu(x)dx = \int\limits_{T_2 \backslash \bar{T}_1} \mu(x)dx = 1$.

Теорема 1. Для любых тел T_1, T_2 выполняется равенство

$$\inf_{\mu \in A} \left| U(x;\mu,T_1) - U(x;\mu,T_2) \right| = 0, \tag{1}$$

для всех x, расположенных в окрестности бесконечности.

Введём вспомогательные множества P, P_∞; S_k – точка в R^2 в случае $m \geq 3 - mes_{m-1} S_k = 0$. Под $P(P_\infty)$ условимся обозначать конечное (не более чем чётное) объединение множеств S_k такое, что в случае $m \geq 3$ – это условие выполняется для любой последовательности точек $\{x_k\}$, $x_k \in S_k$, $k \in N$.

Предположим, что Т является жордановой областью в P^2, при этом, в случае $m \geq 3$ $T \in C^{1,\lambda}$, за исключением, быть может, точек типа P_∞, в случае потенциала простого слоя, последнее условие выполнено и в R^2. Определим: $P(T) = \{x \in \partial T$: в окрестности точки x ∂T не является аналитической поверхностью и для любого $p \geq 2$ $P^{p,\lambda}(T) = \{ x \in \partial T :$ в окрестности точки x $\partial T \notin c^{p,\lambda} \}$, $P^1(T) = \bigcup\limits_{p \geq 2} P^{p,\lambda}$.

Обозначим через D множество всех областей, таких, что условие Т $\in D$ эквивалентно условию $\partial T = P(T)$. Также определяются классы $D_{p,\lambda}$, D^1 (по P^1). Ясно, что $D_{p,\lambda} \subset D_{P1,\lambda} \subset D^1 \subset D_1$, $p<p_1$. Аналогично определим D, если T состоит из конечного числа (не обязательно односвязных областей). Используя алгоритм построения «близких областей», можно заметить, что множество областей из класса $D_{p,\lambda}$ плотно, например, в классе областей в $C^{l,\lambda}$, а также в множестве измеримых множеств.

Приведем еще один результат в общем виде, из которого вытекает, в частности, единственность решения задачи 1 в множествах соответственно $D_{p,\lambda}$, ,D, D_1 в случае достаточно гладких плотностей потенциалов. Пусть T_1, T_2 конечные совокупности жордановых областей. Рассмотрим ограниченные измеримые функции μ, μ_1, μ_2 (в постановке 1 они ограничены всюду, в постановке 2 – в D), такие, что μ аналитична в окрестности $\partial T_1 \cup \partial T_2$ ($\mu \in C^{p,\lambda}$ или, соответственно, $\mu \in C^\infty$), μ_i – аналитичные, соответственно, в окрестностях ∂T_i ($\mu \in C^{p,\lambda}$ или $\mu \in C^\infty$, соответственно) за исключением, быть может, точек типа P_∞, $(\mu(x) = 0) \cap (\partial T_1 \cup \partial T_2)$, $(\mu_i(x) = 0) \cap \partial T_i$, i=1, 2, множества типа P_∞.

Теорема 2. Пусть $T_1, T_2 \in D$ ($T_1, T_2 \in D_{p,\lambda}$, или, соответственно, D^1), μ, μ_i, i=1,2 удовлетворяют предыдущим условиям, $U(x;\mu,T_1) - U(x;\mu,T_2) \in Q_\infty$ или $V(x;\mu_1,\partial T_1) - V(x;\mu_2,\partial T_2) \in Q_\infty$, то T_1=T_2, при этом, если $\tilde{T}_i = T_i$, $U(x;\mu_1,T_1) - U(x;\mu_2,T_2) \in Q_\infty$, то T_1=T_2, $\mu_1(x) = \mu_2(x)$, $x \in \partial T_1$.

Следствие. Пусть $T_1, T_2 \in C^{1,\lambda}$, $T_1 \neq T_2$, μ аналитична в окрестности точек $\partial(T_1) \cup \partial(T_2)$ и $(\mu(x)=0) \cap (\partial(T_1) \cup \partial T_2)$ есть множество типа R_∞ ($\mu \in C^{p,\lambda}$ или $\mu \in C^\infty$, соответственно) и $U(x,\mu,T_1) = U(x;\mu,T_2)$, $x \notin \tilde{T}_1 \cup \tilde{T}_2$, то $\partial(\tilde{T}_1 \cup \tilde{T}_2) \setminus ((\partial T_1) \cap (\partial T_2))$ состоит из аналитических поверхностей, (соответственно $C^{p,\lambda}$, C^∞).

Отсюда следует, что если хотя бы один «кусок» поверхности $\partial(\tilde{T}_1 \cup \tilde{T}_2) \setminus (\partial(T_1) \cap \partial(T_2))$ не является аналитическим, то $U(x;\mu,T_1) \neq U(x;\mu,T_2)$ (тождественно не равно), $x \notin \tilde{T}_1 \cup \tilde{T}_2$.

В примере неединственности, построенном В. М. Исаковым, фигурирующее в следствии множество является окружностью, то есть аналитической кривой и, как это показано, не случайно.

Данная теорема допускает и другие обобщения.

Формула Грина позволяет распространить теоремы единственности, полученные различными авторами на потенциалы более общего вида. Действительно, пусть объёмные потенциалы областей T_1, T_2 плотностей μ_1, μ_2 не совпадают (вместо плотностей можно рассматривать произвольные конечные знакопеременные меры), то есть в окрестности бесконечности

$$U(x;\mu_1,T_1) \neq U(x;\mu_2,T_2). \tag{2}$$

Тогда, применяя формулу Грина, получим, что не совпадают и следующие потенциалы:

$$U(x;\theta_1, -a(\frac{\partial}{\partial\nu}\theta_1 + \sum b_i n_i \theta_1), \mu_1 - \mathbf{L}\theta_1, T_1) \neq$$

$$U(x;\theta_2 - a(\frac{\partial}{\partial\nu}\theta_2 + \sum b_i n_i \theta_2), \mu_2 - \mathbf{L}\theta_2, T_2), \tag{3}$$

где ν – внешняя конормаль; n_i – координаты внешней нормали T_1, T_2.

Отсюда могут быть получены различные условия несовпадения потенциалов. Как известно, например, равенство (2) имеет место в случае L=Δ, если T_1, T_2 звёздные и $\mu_1 = \mu_2 = const$, $R^m \setminus (\bar{T}_1 \cup \bar{T}_2^1)$ - связное множество.

1. Пусть $\mathcal{L}\theta_i(y) = \mu_i(y)$, $y \in T_i$, $\theta_i(y) = 0$, $y \in \partial T_i$, получаем условие несовпадения потенциалов простого слоя (а если условие

$\theta_i(y)=0$, $y\in\partial T_i$ отсутствует, то получим условие несовпадения суммы потенциалов простого слоя и двойного).

2. Пусть

$$\mathcal{L}\theta_i(y)=\mu_i(y),\ y\in T_i;\ \frac{\partial}{\partial\nu}\theta_i(y)+\sum b_k(y)n_k(y)\theta_i(y)=0,\ y\in\partial T_i. \quad (4)$$

Данная задача имеет решение, если $\sum b_k(y)n_k(y)\geq 0$, $y\in\partial T$ нетождественно равно нулю, в случае $\mathcal{L}=\Delta+a_0$, $a_0<0$, эта задача имеет единственное решение. Равенство (4) является достаточным условием несовпадения потенциалов двойного слоя с плотностями θ_1,θ_2. Можно привести ещё ряд конкретных случаев. Из результатов В.М. Исакова, например, вытекает несовпадение потенциалов оператора Лапласа вида $U(x;-\mu_i,\frac{\partial}{\partial n}\mu_i,\mu-\Delta\mu_i,T_i)$, $i=1,2$, где $T_1\neq T_2$, области выпуклые относительно одной из координатных осей x_k, $\mu_1,\mu_2\in W_1^2(D)$, $\mu_1+\mu_2>0$, $\mu_1+\mu_2$ не зависит от x_k и $\Delta\mu=\mu_2$ в D.

Из результата А.И. Прилепко вытекает единственность решения внешней обратной задачи теории потенциала в классе выпуклых областей (и неединственность в классе звёздных областей, что вытекает из результатов И.Н. Раппопорта) для потенциалов $U(x;\mu_i,1-\frac{\partial}{\partial n}\mu_i,-\Delta\mu_i,T_i)$, $i=1,2$.

Условия несовпадения (2) эквивалентны друг другу. Используя результат А.И. Прилепко, заметим, что неравенство (2) будет иметь место в классе выпуклых областей, если существуют такие функции θ_1, θ_2, что $\mathcal{L}\theta_i(y)=\mu_i(y)$, $y\in T_i$; (5)

$$a\frac{\partial}{\partial\nu}\theta_1|_{\partial T_1}=a\frac{\partial}{\partial\nu}\theta_2|_{\partial T_2}=const,\ \theta_1|_{\partial T_1}=\theta_2|_{\partial T_2}=0. \quad (6)$$

В случае, когда $b_1=b_2=...=b_m$, во втором соотношении (6) можно считать $\theta_i|_{\partial T_i}=c_i=const$, $i=1,2$. (7)

Аналогично предыдущему, рассмотрим случай суммарного потенциала масс. Пусть $U(x;\upsilon_1,\mu_1,T_1)\neq U(x;\upsilon_2,\mu_2,T_2)$, $x\notin\bar{T}_1\cup\bar{T}_2$, (2)' выражение (3)', полученное из (2)' как (3) из (2). Тогда, по аналогии с предыдущим приведем условия несовпадения потенциалов (3).

Мы рассмотрим только как из соотношения (3) можно получить соотношение (2) используя, например, результат, полученный А. И. Прилепко для потенциалов простого слоя в классе выпуклых областей.

Итак, (2) будет иметь место, если существуют такие функции θ_1, θ_2, что для плотностей μ_i выполнено равенство (5) и $\upsilon_i(y) = c + \frac{\partial}{\partial n}\theta_i(y)$, $y \in \partial T_i$, (8) причём для θ_1, θ_2 выполнены, соответственно, соотношения как (7), так и (8). В случае же звёздных областей T_1, T_2 таких, что $R^m \setminus (\bar{T}_1 \cup \bar{T}_2)$ связно, если объёмные потенциалы T_1, T_2 плотности μ не совпадают, то (3) будет иметь место, если в условии (8)[1] $c=0$, выполнены условия (5), (7) и $\mu_i(x) - L\theta_i(x) = \mu(x)$, $x \in T_i$.

В дополнение к предыдущему, приведём ещё ряд примеров потенциалов вида $U(x;\theta,\nu,\mu,\mathrm{T})$, для которых имеет место как единственность решения задачи 1, так и неединственность решения для оператора Δ:

1) единственность для потенциалов вида $U(x;\theta_T,-\frac{\partial}{\partial n}\theta_T,\mu-\Delta\theta_T,T)$, $x \notin T$, $\theta_T \in W_1^2(T)$ – функция, определённая в T, где T – выпуклые области относительно прямых $x=x_k$, μ не зависит от x_k (если μ зависит от всех переменных, то в любом классе областей, содержащем весь перечисленный выше класс областей, вообще, говоря, имеет место неединственность решения задачи);

2) пусть μ_T – мера, $\sup p\mu_T \subset T$, $T \in C^{1,\lambda}$, $\mu \in C^{p,\lambda}$, $p \geq 2$, $\mu(x) > 0$, $x \in D$, $\bar{T} \subset D$, $P^{p,\lambda}(T) = \partial(T)$ или μ – аналитическая функция, $P(T) = \partial(T)$, то единственность решения задачи для потенциалов вида $U(x;\theta_T,\mu-\frac{\partial}{\partial n}\theta_T,\mu-\Delta\theta_T,T)$ или A в

$U(x;\theta_T,\mu-\frac{\partial}{\partial n}\theta_T,\mu_T,T)$;

3) В классе многоугольников – единственность для потенциала $U(x;\theta_T,\upsilon-\frac{\partial}{\partial n}\theta_T,\mu_T,T)$, $\nu > 0$, $\upsilon \in C^{\lambda}(D)$, $\mu_T \in L_p$, $p > 2$, и неединственность для потенциалов $U(x;\theta_T,-\frac{\partial}{\partial n}\theta_T,1-\Delta\theta_T,T)$.

Но в трёхмерном пространстве имеет место единственность в классе многоугольников, гомеоморфных шару.

Заметим, что потенциал $U(x;\theta_T,-\frac{\partial}{\partial n}\theta_T,-\Delta\theta_T,T)$ равен нулю вне T для любой области T. В тех случаях, когда имеет место единственность определения области, вместо потенциалов Лапласа можно рассматривать потенциалы полигармонических операторов или операторов вида ΔL, где L – любой локальный оператор, определённый в D.

УДК УДК 551.345, 539.3

Об одной задаче фильтрации в условиях вечной мерзлоты

А.А. Папин, А.Н. Сибин, Д.П. Хворых
АлтГУ, г. Барнаул

Рассматривается движение подземных вод в межмерзлотном водоносном горизонте, который соприкасается с промерзшим песчаным грунтом. В процессе оттаивания грунта и при достижении определенной величины скорости фильтрации происходит вынос частиц грунта из области течения и образование подземных полостей. В результате увеличения и достижения критических размеров этих полостей, происходит обрушения свода многолетнемерзлых пород. На поверхности грунта формируются провальные формы рельефа (суффозионные воронки) [1, 2, 3, 4].

Математическая постановка задачи связана с рассмотрением фильтрационных течений, процессов суффозии и обрушения грунта. Особенностью задачи является наличие заранее неизвестных границ, которые определяются из решения задачи Стефана.

1. Фильтрация однородной несжимаемой жидкости. Фильтрационное течение определяется уравнениями [5, 6]

$$div\vec{v}=0,\quad \vec{v}=\nabla\varphi,\quad \varphi=-k(p/\rho g+x_3).$$

Здесь k – коэффициент фильтрации, p-давление, ρ-плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести и $\varphi(x,t)$ потенциал. Соответственно

$$\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)=m\frac{d\vec{x}}{xt},\quad \vec{x}=(x_1,x_2,x_3),$$

– вектор скорости фильтрации, а m – пористость грунта.