Но в трёхмерном пространстве имеет место единственность в классе многоугольников, гомеоморфных шару.

Заметим, что потенциал $U(x;\theta_T,-\frac{\partial}{\partial n}\theta_T,-\Delta\theta_T,T)$ равен нулю вне T для любой области T. В тех случаях, когда имеет место единственность определения области, вместо потенциалов Лапласа можно рассматривать потенциалы полигармонических операторов или операторов вида ΔL, где L – любой локальный оператор, определённый в D.

УДК УДК 551.345, 539.3

Об одной задаче фильтрации в условиях вечной мерзлоты

А.А. Папин, А.Н. Сибин, Д.П. Хворых
АлтГУ, г. Барнаул

Рассматривается движение подземных вод в межмерзлотном водоносном горизонте, который соприкасается с промерзшим песчаным грунтом. В процессе оттаивания грунта и при достижении определенной величины скорости фильтрации происходит вынос частиц грунта из области течения и образование подземных полостей. В результате увеличения и достижения критических размеров этих полостей, происходит обрушения свода многолетнемерзлых пород. На поверхности грунта формируются провальные формы рельефа (суффозионные воронки) [1, 2, 3, 4].

Математическая постановка задачи связана с рассмотрением фильтрационных течений, процессов суффозии и обрушения грунта. Особенностью задачи является наличие заранее неизвестных границ, которые определяются из решения задачи Стефана.

1. Фильтрация однородной несжимаемой жидкости. Фильтрационное течение определяется уравнениями [5, 6]

$$div\vec{v}=0,\quad \vec{v}=\nabla\varphi,\quad \varphi=-k(p/\rho g+x_3).$$

Здесь k – коэффициент фильтрации, p-давление, ρ-плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести и $\varphi(x,t)$ потенциал. Соответственно

$$\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)=m\frac{d\vec{x}}{xt},\quad \vec{x}=(x_1,x_2,x_3),$$

– вектор скорости фильтрации, а m – пористость грунта.

При некоторых дополнительных предположениях [5] для ординаты свободной поверхности $x_3 = H(x,t)$ справедливо уравнение фильтрации Буссинеска

$$\frac{\partial(\mu H)}{\partial t} = div(M(x,H)\nabla H) + \varepsilon, \quad x \in \Omega_2.$$

Здесь μ-водоотдача или недостаток насыщения грунта, $M = k(H - H_B)$, а ε-плотность источников (стоков) в Ω_2.

2. Суффозия [7, 8, 9, 10, 11]. Суффозия представляет собой эрозионный процесс, когда частицы почвы отделяются фильтрационным потоком и начинают двигаться в поровом объеме. Следуя рисунку 1, рассмотрим области Ω_1-Ω_4. Области Ω_1 и Ω_3 (мерзлый грунт) представляют собой однородные и недеформируемые среды, в которых эррозионные процессы не происходят. Область фильтрационного течения Ω_2 характеризуются скоростью фильтрации $\vec{v}$. Область Ω_4 представляет собой талый грунт и рассматривается как деформируемая область. На границе $\Gamma = \overline{\Omega_2} \cap \overline{\Omega_4}$ происходят суффозионные процессы. Эррозионный поток $\dot{m}$ определяется соотношением [9]:

$$\dot{m} = \rho(c - \vec{v}\vec{n}),$$

где $\vec{n}$-вектор внешней (по отношению к Ω_2) нормали к Γ, ρ плотность жидости, c нормальная скорость движения границы Γ_2. Для определения неизвестной границы Γ используются стандартные соотношения на границе талого грунта и области фильтрации [10, 11, 12].

3. Обрушение. Для описание процесса обрушения используется подход, в котором многолетнемерзлотные породы рассматриваются как хрупкое упругое тело. В этом подходе уравнение движения среды и критерий разрушения берутся в виде [12]:

$$divP + \gamma\vec{g} = 0, \quad |\sigma_1| = \sigma', \quad |\sigma_2| = \sigma'',$$

где P – тензор напряжений; γ – плотность грунта; $\vec{g}$ – вектор внешних сил; σ_1 и σ_2 – главные напряжения; σ' – предельное напряжение, при котором мерзлый грунт разрушается растяжением, а σ'' – предельное напряжение, при котором мерзлый грунт разрушается сжатием.

Авторы признательны научному сотруднику Института мерзлотоведения СО РАН им. П.И. Мельникова Гагарину Л.А. за обсуждение задачи.

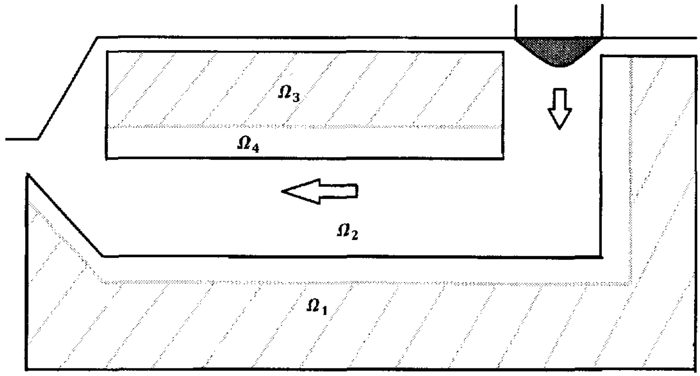

Рис. 1. Схематическое движение подземных вод в условиях мерзлого грунта Ω_1 – мерзлый грунт с температурой Т=-0,2С^0; Ω_2 – область фильтрации талого грунта; Т=+0,2 С^0; Ω_3 – мерзлый грунт с температурой Т=-0,2 С^0; Ω_4 – область суффозии , талый грунт с Т=0 С^0

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (государственное задание №1.3820.2011) и гранта РФФИ 13-08-01097.

Библиографический список

1. Шепелёв В.В. Надмерзлотные воды криолитозоны / Сиб. отд-ние, Ин-т мерзлотоведения им. П.И. Мельникова. – Новосибирск, 2011. – 169 с.

2. Фельдман Г.М. Термокарст и вечная мерзлота. – Новосибирск: Наука, 1984.

3. Фельдман Г.М. Передвижение влаги в талых и промерзающих грунтах. – Новосибирск: Наука, 1988.

4. Васильев В.И., Максимов А.М., Петров Е.Е., Цыпкин Г.Г. Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. М., 1997.

5. Бер Я., Заславский Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. – М.: Мир, 1971. – 432 с.

6. Папин А.А. Краевые задачи двухфазной фильтрации. – Барнаул. Изд-во Алт. ун-та, 2009.

7. Поляков В.Л. О механической суффозии грунтов под действием цилиндрического стока переменной интенсивности // Прикладная гидромеханика. – Киев, 2006. – Т. 8, №4. – С. 43–52.

8. Кузнецов А.Ю., Пославский С.А. Исследование математической модели механической суффозии // Вестник Харьковского национального университета. Серия «Математика, прикладная математика и механика». – Харьков, 2009. – №875. – С. 57–68.

9. Frederic Golay, Stephane Bonelli. Numerical modeling of suffusion as an interfacial erosion process. European Journal of Environmental and Civil Engineering, 2010.

10. Хусаинова З.Р. Теоретическое исследование процессов термоэрозии и термокарста многолетнемерзлотных пород: дис. ... к-та физ.-мат. наук. – Уфа, 2007.

11. Протодьяконова Н.А. Математическое моделирование деформаций грунта при оттаивании с учетом фильтрационной консолидации: дис. ... к-та физ.-мат. наук. – Якутск,2008.

12. Суриков В.В. Механика разрушения мерзлых грунтов. – Ленинград, 1979. –128 с.

УДК 513. 83

О единственности разбиения линии на конгруэнтные части

И.В. Поликанова

АлтГПА, г. Барнаул

Определим линию γ в метрическом пространстве E как вложение φ числового отрезка $[a,b] \subset R$ в E. Образ при этом вложении числового отрезка $[c,d]$ такого, что $[c,d] \subset [a,b]$, называется дугой с концами $C = \varphi(c)$ и $D = \varphi(d)$ и обозначается $\overline{CD}$. Точки $A_0 = \varphi(a)$ и $B = \varphi(b)$ – концы линии λ, а $\varphi(t)$ при $t \in (a,b)$ – внутренние точки. Ввиду того, что отображение φ:[a,b]$\to \gamma$ является гомеоморфизмом, всякий набор чисел $\{t_1, t_2, ..., t_{n-1}\}$ таких, что $a < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < b$, задаёт *n-1* внутренних точек $A_1, A_2,.., A_{n-1}$ на γ и однозначно определяет *n* дуг $\breve{a}_i = \overline{A_{i-1} A_i}$, i = 1,2,...,n (A_n =B), получающих естественный порядок на γ и обладающих тем свойством, что $\breve{a}_i \cap$