Введение в рассмотрение указанных новых математических инструментов влечет за собой необходимость создания нового подхода к определению эффективных (предельных) коэффициентов. В предлагаемом докладе демонстрируется новый метод, основанный на систематическом применении аппарата теории псевдо-дифференциальных операторов, прежде всего, преобразований и потенциалов Рисса. Результатом применения этого метода является нахождение точных значений компонент тензора вязкости в эффективной (предельной) модели.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 12-01-00390, 13-01-00529 и Междисциплинарного интеграционного проекта №30 «Многочастотные колебания и параметрический резонанс в распределенных системах».

Библиографический список

1. Саженков С.А. Уравнение Тартара для гомогенизации модели динамики мелкодисперсных смесей // Сибирский математический журн. – 2001. Т. 42, №6. – С. 1375–1390.

2. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. – М.: Физ. мат. литература, 1993.

3. Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А., Шамаев А.С. Усреднение. Методы и приложения. – Новосибирск: Т. Рожковская, 2007.

4. Tartar L. H-measures, a new approach for studying homogenization oscillations and concentration effects in partial differential equations // Proc. R. Soc. Edinb. – 1990. – Vol. 115A. – P. 193–230.

5. Sazhenkov S.A. Cauchy problem for the Tartar equation // Proc. R. Soc. Edinb. – 2002. – Vol. 132A. – P. 395–418.

УДК 517.958:531.332

Кинетическое уравнение для задачи динамики баротропного газа с быстро осциллирующими распределениями плотности

С.А. Саженков

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск

В ограниченной пространственно-временной области рассматриваются уравнения, описывающие динамику вязкого газа. Считается, что граничные значения распределений

плотности быстро осциллируют. Изучаются предельные режимы, возникающие при стремлении частот осцилляций к бесконечности. В результате конструируется предельная (гомогенная) модель, которая содержит полную информацию о предельных режимах осцилляций и включает в себя дополнительное кинетическое уравнение, имеющее вид уравнения Больцмана в кинетической теории газов.

Постановка задачи. Рассматривается следующая задача.

Задача А. В пространственно-временном цилиндре $Q_T = \{(\vec{x},t) \in \Omega \times (0,T)\}$ (Ω — ограниченная область в R^3 с гладкой границей $\partial\Omega$, $T = const > 0$) требуется определить плотность $\rho = \rho(\vec{x},t)$ и поле скоростей $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},t)$, удовлетворяющие уравнению баланса массы

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div_x(\rho\vec{u}) = 0, \quad (\vec{x},t) \in \Omega \times (0,T),$$

уравнению количества движения

$$\frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} + div_x(\rho\vec{u} \otimes \vec{u}) - \mu\Delta_x\vec{u} - \xi\,\nabla_x div_x\vec{u} + \nabla_x P = \rho\vec{g},$$

$$(\vec{x},t) \in \Omega \times (0,T),$$

и уравнению состояния баротропного газа

$$P = a\rho^\gamma, \ (\vec{x},t) \in \Omega \times (0,T).$$

Система дополняется краевыми условиями на границе течения и начальными данными

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \vec{U}(\vec{x}) \text{ при } \vec{x} \in \partial\Omega,$$

$$\rho(\vec{x},0) = \rho_0^\varepsilon(\vec{x}), \quad \vec{u}(\vec{x},0) = \vec{u}_0^\varepsilon(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega.$$

Значения вязкости $\mu > 0$, $\xi > -\mu$ и коэффициент $a > 0$ постоянны и заданы. Постоянная адиабаты γ принимает значения больше 3/2. Гладкая вектор-функция $\vec{g}$ — заданная плотность массовых сил. Начальные данные зависят от малого параметра $\varepsilon > 0$ и удовлетворяют следующим условиям и предельным соотношениям:

$$\rho_0^\varepsilon \geq 0 \text{ почти всюду в } \Omega, \ \rho_0^\varepsilon \in L^\gamma(\Omega), \quad \vec{u}_0^\varepsilon \in L^{2\gamma/(\gamma-1)}(\Omega),$$

$$\rho_0^\varepsilon \to \rho_0^* \text{ слабо в } L^\gamma(\Omega), \ \vec{u}_0^\varepsilon \to \vec{u}_0^* \text{ сильно в } L^{2\gamma/(\gamma-1)}(\Omega) \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

При произвольно фиксированном $\varepsilon > 0$ задача А имеет по меньшей мере одно обобщенное решение $(\rho^{\varepsilon}, \vec{u}^{\varepsilon}, P^{\varepsilon})$.

Замкнутая эффективная модель. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема Н. Пусть $\{(\rho^{\varepsilon}, \vec{u}^{\varepsilon}, P^{\varepsilon})\}_{\varepsilon>0}$ — семейство обобщенных решений задачи А, соответствующее быстро осциллирующим начальным данным $\{(\rho_0^{\varepsilon}, \vec{u}_0^{\varepsilon})\}_{\varepsilon>0}$. Тогда существуют четверка функций $(\rho^*, \vec{u}^*, P^*, f)$ и подпоследовательность $\varepsilon \to 0$, такие, что $\rho^{\varepsilon} \to \rho^*$ слабо в $L^{\gamma}(\Omega\times(0,T))$, $\vec{u}^{\varepsilon} \to \vec{u}^*$ слабо в $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, $P^{\varepsilon} \to P^*$ слабо в $L^{(1+\kappa)}(\Omega\times(0,T))$ $(\forall \kappa > 0)$ при $\varepsilon \to 0$, и четверка функций $(\rho^*, \vec{u}^*, P^*, f)$ служит решением сформулированной ниже задачи Н.

Задача Н. (Усредненная задача динамики вязкого газа с быстро осциллирующими начальными данными.) В области $\{(\vec{x}, t, \lambda) \in \Omega\times(0,T)\times R_{\lambda}\}$ требуется определить эффективные плотность $\rho^* = \rho^*(\vec{x}, t)$, поле скоростей $\vec{u}^* = \vec{u}^*(\vec{x}, t)$, давление $P^* = P^*(\vec{x}, t)$, а также непрерывную справа и монотонно неубывающую по λ функцию распределения $f : \Omega\times(0,T)\times R_{\lambda} \mapsto [0,1]$, удовлетворяющие

1) тем же уравнениям баланса массы и импульса, что и в исходной задаче А, с функциями $\rho^*, \vec{u}^*$ и P^* на месте $\rho, \vec{u}$ и P;

2) уравнению состояния газа

$$P^*(\vec{x}, t) = a\gamma \int_0^{+\infty} \lambda^{\gamma-1}(1 - f(\vec{x}, t, \lambda))d\lambda;$$

3) кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + div_x(f\vec{u}^*) - \frac{\partial}{\partial \lambda}(\lambda f\, div_x \vec{u}^*) + \frac{\partial}{\partial \lambda}(\lambda \mathrm{M}) = 0,$$

$$(\vec{x}, t, \lambda) \in \Omega\times(0,T)\times R_{\lambda};$$

4) условиям на границе течения и начальным условиям

$$\vec{u}^*(\vec{x},t) = \vec{U}(\vec{x}) \text{ при } \vec{x} \in \partial\Omega,$$
$$\rho^*(\vec{x},0) = \rho_0^*(\vec{x}), \quad \vec{u}^*(\vec{x},0) = \vec{u}_0^*(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega,$$
$$f(\vec{x},0,\lambda) = f_0(\vec{x},\lambda), \quad \vec{x} \in \Omega, \quad \lambda \in R.$$

Решение задачи Н понимается в обобщенном смысле, то есть в смысле соответствующих интегральных равенств.

В кинетическом уравнении функция М определена формулой

$$M(\vec{x},t,\lambda) = \frac{1}{\mu+\xi} \int_{[\lambda,+\infty)} (as^\gamma - P^*(\vec{x},t)) d_s f(\vec{x},t,s),$$

где $d_s f(\cdot,\cdot,s)$ – стандартная мера Стилтьеса, порожденная функцией $s \mapsto f(\cdot,\cdot,s)$ при почти всех $(\vec{x},t) \in \Omega \times (0,T)$. Начальная функция распределения $f_0 = f_0(\vec{x},\lambda)$ – это функция распределения вероятностной меры Янга, ассоциированной с выбранной подпоследовательностью $(\rho_0^\varepsilon)_{\varepsilon\to 0}$. Меры Янга эффективно описывают поведение слабо сходящихся последовательностей, стоящих в качестве переменных в гладких нелинейных функциях.

Заметим, что от начальных данных в настоящей работе не требуется никаких свойств упорядоченности, например периодичности, квазипериодичности, случайной однородности. Наличие упорядоченной микроструктуры является общим местом во многих задачах гомогенизации. Оно позволяет находить структуру пределов слабо сходящихся последовательностей нелинейных выражений, входящих в модели. В настоящей работе связанные с этим сложности преодолеваются посредством построения дополнительного кинетического уравнения: оно несет полную информацию об эволюции осцилляций в пространстве и времени.

Подробности проведенного исследования изложены в работе [1].

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 12-01-00390, 13-01-00529 и Междисциплинарного интеграционного проекта №30 «Многочастотные колебания и параметрический резонанс в распределенных системах».

Библиографический список

1. Плотников П.И., Саженков С.А. Метод кинетического уравнения для задач динамики вязкого газа с быстро осциллирующими распределениями плотности // Труды МИАН. – 2013. – Т. 281, №3. – 17 с.