УДК 532.546+517.958

Задача фильтрации жидкости в тонком слое льда

М.А. Токарева
АлтГУ, г. Барнаул

Рассматривается математическая модель фильтрации жидкости в тонком вязкоупругом слое льда. Для описания процесса используются законы сохранения масс, закон Дарси, учитывающий движение твердого скелета, реологический закон типа Максвелла и уравнение сохранения импульса системы [1–2]. Вопросы разрешимости одномерных задач для этой модели рассматривались в работах [3–4].

Рассматривается следующая система уравнений составного типа

$$\frac{\partial(1-\varphi)}{\partial t}+div((1-\varphi)\vec{v}_s)=0,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t}+div(\varphi\vec{v}_f)=0, \tag{1}$$

$$\varphi(\vec{v}_f-\vec{v}_s)=-\frac{K\varphi^n}{\mu}(\nabla p_f+\rho_f\vec{g}), \tag{2}$$

$$\frac{1}{1-\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=-\frac{\varphi^m}{\nu}p_e-\varphi^b\beta_\varphi\frac{dp_e}{dt}, \tag{3}$$

$$\rho\vec{g}+div\left((1-\varphi)\nu\left(\frac{\partial\vec{v}_s}{\partial\vec{x}}+\left(\frac{\partial\vec{v}_s}{\partial\vec{x}}\right)^*\right)\right)-\nabla p_{tot}=0, \tag{4}$$

$$p_{tot}=\varphi p_f+(1-\varphi)p_s,\qquad p_e=(1-\varphi)(p_s-p_f),\rho=\varphi\rho_f+(1-\varphi)\rho_s, \tag{5}$$

где $\rho_f,\rho_s,\vec{v}_s,\vec{v}_f$ – соответственно истинные плотности и скорости фаз; φ – пористость; $\vec{g}=(0,-g)$ – плотность массовых сил; k – проницаемость, μ – коэффициент динамической вязкости жидкости; ν,β_φ,b,m – параметры твердой фазы; p_{tot} – общее давление (заданная функция). Задача записана в эйлеровых координатах (t,x,z). Истинные плотности ρ_s,ρ_f принимаются постоянными. Искомыми являются величины φ, v_s, v_f, p_f, p_s.

Проведем обезразмеривание уравнений (1)–(5). Пусть $\bar{x},\bar{z},\bar{t}$ - безразмерные переменные, определенные равенствами $\bar{x}=\dfrac{x}{L}$, $\bar{z}=\dfrac{z}{H}$, $\bar{t}=\varepsilon^k\tau_0 t$, $\varepsilon=\dfrac{H}{L}\ll 1$, где $[L]=[H]=[\text{м}]$, $[\tau_0]=[1/\text{с}]$; k – произвольное вещественное число.

Положим:

$$p_f(t,x,z)=\alpha\bar{p}(\bar{t},\bar{x},\bar{z})=\alpha\bar{p}(\varepsilon^k\tau_0 t,\frac{x}{L},\frac{z}{H}),$$

$$v_s^i(t,x,z)=\beta^i\bar{v}_s^i(\bar{t},\bar{x},\bar{z})=\beta^i\bar{v}_s^i(\varepsilon^k\tau_0 t,\frac{x}{L},\frac{z}{H}),i=1,2,$$

$$v_f^i(t,x,z)=\beta^i\bar{v}_f^i(\bar{t},\bar{x},\bar{z})=\beta^i\bar{v}_f^i(\varepsilon^k\tau_0 t,\frac{x}{L},\frac{z}{H}),i=1,2,$$

$$p_{tot}(t,x,z)=\alpha\bar{p}_{tot}(\bar{t},\bar{x},\bar{z}),$$

$$\rho_f g=\frac{\alpha}{H}\bar{\rho}_f\bar{g},\quad \rho_s g=\frac{\alpha}{H}\bar{\rho}_s\bar{g}.$$

Здесь $[\beta^i]=[\text{м/с}]$, $[\alpha]=[\text{Па}]$, а все функции с верхней чертой являются безразмерными.

Для получения безразмерной формы уравнений следует положить $\beta^1=\varepsilon^k\tau_0 L$, $\beta^2=\varepsilon^k\tau_0 H$. После этого системе можно придать вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial(1-\varphi)}{\partial\bar{t}}+div((1-\varphi)\bar{v}_s)=0,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{t}}+div(\varphi\bar{v}_f)=0,\end{gathered}\tag{6}$$

$$\begin{gathered}\frac{\varepsilon^k\tau_0\mu L^2}{\alpha K}\varphi(\bar{v}_f^1-\bar{v}_s^1)=-\varphi^n\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}},\\ \frac{\varepsilon^{k+2}\tau_0\mu L^2}{\alpha K}\varphi(\bar{v}_f^2-\bar{v}_s^2)=-\varphi^n\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{z}}-\bar{\rho}_f\bar{g}\right),\end{gathered}\tag{7}$$

$$\frac{\varepsilon^k\tau_0\nu}{\alpha(1-\varphi)}\frac{d\varphi}{d\bar{t}}=-\varphi^m(\bar{p}_{tot}-\bar{p})-\varepsilon^k\tau_0\nu\beta_\varphi\varphi^b\frac{d(\bar{p}_{tot}-\bar{p})}{d\bar{t}},\tag{8}$$

$$2\varepsilon^k\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left((1-\varphi)\frac{\partial\bar{v}_s^1}{\partial\bar{x}}\right)+\varepsilon^{k-2}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left((1-\varphi)\frac{\partial\bar{v}_s^1}{\partial\bar{z}}\right)+\tag{9}$$

$$+\varepsilon^k\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left((1-\varphi)\frac{\partial\bar{v}_s^2}{\partial\bar{x}}\right)=\frac{\alpha}{\nu\tau_0}\frac{\partial p_{tot}}{\partial\bar{x}},$$

$$\frac{\tau_0 \nu}{\alpha}(\varepsilon^{k+2}\frac{\partial}{\partial \overline{x}}\left((1-\varphi)\frac{\partial \overline{v}_s^2}{\partial \overline{x}}\right)+2\varepsilon^k\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left((1-\varphi)\frac{\partial \overline{v}_s^2}{\partial \overline{z}}\right)+$$
$$+\varepsilon^k\frac{\partial}{\partial \overline{x}}\left((1-\varphi)\frac{\partial \overline{v}_s^1}{\partial \overline{z}}\right)=\overline{\rho}\overline{g}+\frac{\partial \overline{p}_{tot}}{\partial \overline{z}}. \tag{10}$$

В системе (6)–(10) коэффициенты $\frac{\tau_0 \mu L^2}{\alpha K}$, $\frac{\tau_0 \nu}{\alpha}$, $\tau_0 \nu \beta_\varphi$ безразмерные. Параметры $\mu, \nu, \beta_\varphi, \tau_0, L, K$ фиксированы. Свободным остается параметр α, от выбора которого будет зависеть вид системы после предельного перехода при $\varepsilon \to 0$.

Пусть $k \geq 2$ и $\alpha = \varepsilon^k \mu \tau_0$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ приходим к системе

$$\frac{\partial(1-\varphi)}{\partial \overline{t}}+div((1-\varphi)\overline{v}_s)=0,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{t}}+div(\varphi \overline{v}_f)=0, \tag{11}$$

$$\frac{L^2}{K}\varphi(\overline{v}_f^1-\overline{v}_s^1)=-\varphi^n\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}},$$
$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{z}}=\overline{\rho}_f\overline{g}, \tag{12}$$

$$\frac{1}{1-\varphi}\frac{d\varphi}{d\overline{t}}=-\frac{\mu}{\nu}\varphi^m(\overline{p}_{tot}-\overline{p}), \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left((1-\varphi)\frac{\partial \overline{v}_s^1}{\partial \overline{z}}\right)=0, \tag{14}$$

$$2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left((1-\varphi)\frac{\partial \overline{v}_s^2}{\partial \overline{z}}\right)+\frac{\partial}{\partial \overline{x}}\left((1-\varphi)\frac{\partial \overline{v}_s^1}{\partial \overline{z}}\right)=\frac{\mu}{\nu}(\rho g+\frac{\partial p_{tot}}{\partial \overline{z}}). \tag{15}$$

Исследуется начально-краевая задача для получившейся системы (11)–(15) с условиями

$$\vec{v}_s\big|_{t=0}=\vec{v}_s^{\,0}, \vec{v}_f\big|_{t=0}=\vec{v}_f^{\,0},\ \varphi\big|_{t=0}=\varphi^0, p\big|_{t=0}=p^0,$$
$$\vec{v}_s\big|_{x=0,x=1}=0, \vec{v}_f\big|_{x=0,x=1}=0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки Российской Федерации (государственное задание №1.3820.2011) и гранта РФФИ 13-08-01097.

Библиографический список

1. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. – М., 1971.

2. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // Geodin. Acta. – 1998.

3. Папин А.А., Токарева М.А. Модельная задача о движении сжимаемой жидкости в вязкоупругой горной породе // Известия АлтГУ. – Барнаул, 2010. – №1.

4. Папин А.А., Токарева М.А. Задача о движении сжимаемой жидкости в деформируемой пористой среде // Известия АлтГУ. – Барнаул, 2011. – №1.

УДК 535.529:541.64

Зависимость характеристик процесса формования полимерных пленок от параметров тепло- и массопереноса

Ю.Б. Трегубова, И.В. Третьяков, Г.В. Пышнограй
АлтГТУ, г. Барнаул

В работе рассмотрено течение полимерной жидкости в одномерном приближении, соответствующее процессу формования полимерной пленки.

При описании процесса формования полимерной пленки учтено, что получаемая пленка охлаждается и, одновременно, подвергается растяжению.

Для нахождения установившихся напряжений при растяжении была использована обобщенная реологическая модель Виноградова-Покровского [1], параметры которой являются известными функциями температуры.

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + 3\frac{\eta_0}{\tau_0}a_{ik};$$

$$\frac{d}{dt}a_{ik} - v_{ij}a_{jk} - v_{kj}a_{ji} + \frac{1+(\kappa-\beta)I}{\tau_0}a_{ik} = \frac{2}{3}\gamma_{ik} - 3\frac{\beta}{\tau_0}a_{ij}a_{jk},$$

где σ_{ik} – тензор напряжений; p – гидростатическое давление; η_0 и τ_0 – начальные значения сдвиговой вязкости и времени релаксации; v_{ik} – тензор градиентов скорости; a_{ik} – симметричный тензор анизотропии второго ранга; $I=a_{jj}$ – первый инвариант тензора анизотропии;