Подготовлена при финансовом содействии Гранта Губернатора Кемеровской области на поддержку молодых ученых – кандидатов наук на 2013 г.

УДК 519.6

Признак полного ранга интервальной матрицы

С.П. Шарый
ИВТ СО РАН, г. Новосибирск

Интервалами называем замкнутые ограниченные и связные подмножества вещественной оси $\mathbb{R}$, т.е. множества вида $[\eta, \theta] = \{ x \in \mathbb{R} \mid \eta \leq x \leq \theta \}$ для вещественных $\eta, \theta \in \mathbb{R}$, $\eta \leq \theta$. Интервалы и интервальные величины обозначаются в работе буквами жирного шрифта, а неинтервальные (точечные) величины никак специально не выделяются. Посредством $\inf \boldsymbol{a}$ и $\sup \boldsymbol{a}$ обозначим левый и правый концы интервала $\boldsymbol{a} \subset \mathbb{R}$, так что в целом $\boldsymbol{a} = [\inf \boldsymbol{a}, \sup \boldsymbol{a}] = \{ x \in \mathbb{R} \mid \inf \boldsymbol{a} \leq x \leq \sup \boldsymbol{a} \}$. Кроме того, $\operatorname{mid} \boldsymbol{a} = ½ (\sup \boldsymbol{a} + \inf \boldsymbol{a})$ – середина интервала, $\operatorname{rad} \boldsymbol{a} = ½ (\sup \boldsymbol{a} - \inf \boldsymbol{a})$ – радиус интервала.

Интервальная матрица – это прямоугольная таблица интервалов, которую мы обозначаем $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$, имея в виду, что на пересечении ее i-ой строки и j-го столбца стоит элемент $\boldsymbol{a}_{ij}$. К интервальным матрицам операции mid и rad будут применяться поэлементно. Аналогично, поэлементным образом будем понимать теоретико-множественные включения и принадлежности. В частности, для матриц $A = (a_{ij})$ и $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ одинаковых размеров отношение $A \in \boldsymbol{A}$ означает, что $a_{ij} \in \boldsymbol{a}_{ij}$ для всех элементов матриц.

Как известно, квадратная матрица называется неособенной (невырожденной), если ее определитель не равен нулю [1, 2]. Это эквивалентно отсутствию линейной зависимости между строками (столбцами) такой матрицы. Иначе матрица называется особенной (вырожденной). Интервальная квадратная матрица $\boldsymbol{A}$ называется *неособенной*, если неособенны все точечные матрицы $A \in \boldsymbol{A}$ [3–5]. Интервальная квадратная матрица называется *особенной*, если она не является неособенной. Такая матрица содержит хотя бы одну особенную точечную матрицу.

Ближайшим обобщением неособенных матриц, как точечных, так и интервальных, являются матрицы полного ранга. Рангом матрицы называется максимальное число её линейно независимых строк или столбцов, либо максимальный из порядков ненулевых миноров этой матрицы [1, 2]. Как показывается в матричном анализе, все эти числа совпадают между собой. Вещественная $m\times n$-матрица называется *матрицей полного ранга*, если её ранг равен минимальному из чисел m и n (больше он быть не может). Назовем интервальную матрицу *матрицей полного ранга*, если она содержит только точечные матрицы полного ранга. Иначе говорим о том, что данная матрица имеет *неполный ранг.*

Интервальные матрицы интересуют нас, главным образом, в связи с интервальными системами линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_{11} x_1 + \boldsymbol{a}_{12} x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{1n} x_n = \boldsymbol{b}_1 ,\\
&\boldsymbol{a}_{21} x_1 + \boldsymbol{a}_{22} x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{2n} x_n = \boldsymbol{b}_2 ,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\boldsymbol{a}_{m1} x_1 + \boldsymbol{a}_{m2} x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{mn} x_n = \boldsymbol{b}_m ,
\end{aligned}$$

где $\boldsymbol{a}_{ij}$ – интервальные коэффициенты, $\boldsymbol{b}_i$ – интервальные свободные члены, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Если $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ – интервальная $m\times n$-матрица, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_i)$ – интервальный m-вектор, то эту систему можно записать в краткой форме $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$. Интервальные системы уравнений рассматриваемого вида понимаются как совокупности точечных систем линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ с $m\times n$-матрицами A, принадлежащими $\boldsymbol{A}$, и m-векторами b из $\boldsymbol{b}$. *Множеством решений* интервальной линейной системы уравнений будем называть множество

$$\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\, A \in \boldsymbol{A})(\exists\, b \in \boldsymbol{b})(\, Ax = b\,)\,\},$$

образованное всевозможными решениями точечных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$ (см. [3–6]).

Факт полноранговости матрицы интервальной линейной системы уравнений важен при решении задачи восстановления зависимостей по неточным данным с интервальной неопределённостью, где возникают интервальные системы линейных алгебраических уравнений, в которых число переменных, как правило, не совпадает с количеством уравнений. Если интервальная матрица, построенная по данным наблюдений, имеет неполный ранг, то это является свидетельством неудачной организации экспериментов, поскольку результаты некоторых из них оказались следствиями (линейными комбинациями) остальных. Напротив, полноранговая матрица данных является максимально информативной.

Можно показать (идея этого доказательства дана в [4], с. 92), что если интервальная $m\times n$-матрица $\boldsymbol{A}$, $m \geq n$, имеет полный ранг, то множество решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ является ограниченным.

В общем случае проверка того, имеет ли интервальная матрица полный ранг, представляет собой NP-трудную задачу [5]. Ниже в работе даётся достаточно общий признак полноранговости интервальных матриц.

Напомним (см. [1, 2]), что для вещественной $m\times n$-матрицы A *псевдообратной матрицей* (или обобщённой обратной [7]) называется такая вещественная $n\times m$-матрица A^+, что AA^+ и A^+A являются симметричными матрицами и

$$A\,A^+ A = A, \qquad A^+A\,A^+ = A^+.$$

Если A – неособенная квадратная матрица, то $A^+ = A^{-1}$. *Абсолютной нормой* называется норма, зависящая лишь от абсолютных значений элементов (вектора или матрицы). Основной результат представляемой работы –

Теорема. Пусть $\|\cdot\|$ – абсолютная матричная норма. Если для интервальной матрицы $\mathbf{A}$ средняя точечная матрица $\operatorname{mid}\mathbf{A}$ имеет полный ранг и выполнено условие

$$\|\operatorname{rad}\mathbf{A}\| < \|(\operatorname{mid}\mathbf{A})^+\|^{-1},$$

то $\mathbf{A}$ также имеет полный ранг.

Для случая квадратных интервальных матриц аналогичный результат о неособенности был сформулирован в [8], как следствие исследований, выполненных в [9].

Сингулярными числами вещественной $m\times n$-матрицы A называются, как известно, арифметические квадратные корни из общих собственных чисел матриц $A^{\mathrm{T}}A$ и AA^{T} (см. [10]). Мы будем обозначать посредством $\sigma_{\min}(A)$ и $\sigma_{\max}(A)$ наименьшее и наибольшее из сингулярных чисел матрицы A. Ещё один полезный новый результат нашей работы, тесно связанный с приведённой выше Теоремой, –

Предложение. Если для интервальной матрицы $\mathbf{A}$ справедливо $\sigma_{\max}(\operatorname{rad}\mathbf{A}) < \sigma_{\min}(\operatorname{mid}\mathbf{A})$, то она имеет полный ранг.

Если $\mathbf{A} = A$ – точечная матрица, то $\operatorname{mid}\mathbf{A} = A$, $\operatorname{rad}\mathbf{A} = 0$, и все сингулярные числа матрицы $\operatorname{rad}\mathbf{A}$ также равны нулю. Тогда результат Предложения выражает хорошо известный из матричного анализа признак матрицы полного ранга – условие $\sigma_{\min}(A) > 0$. Для случая существенно интервальных матриц результат сформулированного Предложения является обобщением известного признака Румпа [11] (см. также [3, 12]).

В заключение работы отметим, что нахождение псевдообратной матрицы и сингулярных чисел матриц является хорошо разработанным в современном численном анализе. Для их вычисления созданы надежные алгоритмы, а соответствующие готовые подпрограммы входят в стандартные пакеты численных методов линейной алгебры.

Библиографический список

1. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Энциклопедия линейной алгебры. Электронная система ЛИНЕАЛ. – СПб.: БХВ, 2006.

2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Физматлит, 2010.

3. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. – Электронная книга / ИВТ СО РАН. Новосибирск, 2012. URL: http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks

4. Neumaier A. Interval methods for systems of equations. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

5. Rohn J. A handbook of results on interval linear problems. – Электронная книга / Institute of Computer Science, Academy of Sciences of the Czech Republic. – Prague, 2005. 78 p. URL: http://uivtx.cs.cas.cz/~rohn/publist/!handbook.pdf

6. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. – Новосибирск: Наука, 1986.

7. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1982.

8. Ерохин В.И. Оптимальная матричная коррекция и регуляризация несовместных линейных моделей // Дискретный анализ и исследование операций. – 2002. – Т. 9, №2. – С. 41–77.

9. Ерохин В.И. Необходимые и достаточные условия невырожденности интервальных матриц // Международная конференция по вычислительной математике МКВМ-2004. Рабочие совещания / Ред. Шокин Ю.И. и др. – Новосибирск: Издательство ИВМиМГ СО РАН, 2004. – С. 193–200.

10. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. – М.: Мир, 1989.

11. Rump S.M. Verification methods for dense and sparse systems of equations // Topics in Validated Numerics / Herzberger J., ed. – Amsterdam: Elsevier, 1994. – P. 63–135.

12. Rex G., Rohn J. Sufficient conditions for regularity and singularity of interval matrices // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 1999. – Vol. 20, No. 2. – P. 437-445.