зволит находить нужную совокупность показателей, не используя для промежуточных вычислений алгоритм кластеризации.

Библиографический список

1. Дронов С.В., Дементьева Е.А. On a Coefficient of Cluster Differences and its Usage for Post-hoc Analysis in Clusterization. – Biomedical Soft Computing and Human Sciences. – 2012. – Vol. 18, №1. – С. 27–31.

УДК 514.177.2

Замкнутая кривая данной длины, выпуклая оболочка которой имеет наибольший объем

К.О. Кизбикенов
АлтГПА, г. Барнаул

Широко известна задача о незамкнутой кривой данной длины, выпуклая оболочка которой имеет наибольший объем. Эта задача решена и ответом является виток винтовой линии. Аналогичная задача для замкнутых кривых, по-моему, до сих пор не решена.

С помощью программы Mathematica, было проведено численное моделирование. Пусть n это количество звеньев замкнутой ломаной. Искомую кривую будем искать как предел вписанных замкнутых ломаных, когда длины звеньев стремятся к нулю. Для $\mathrm{n} = 5{,}6, \ldots 20$ были исследованы замкнутые ломаные с одинаковыми по длине звеньями, координаты вершин, которых считались неизвестными, кроме трех базисных. Был вычислен объем ее выпуклой оболочки, как функция координат вершин. При этом, длина каждого звена имела длину $\frac{1}{\mathrm{n}}$. Задача свелась к поиску условного экстремума объема выпуклой оболочки при ограничении на длину ломаной. Эта задача была решена численными методами в программе Mathematica. При этом оказалось, что при всех значениях $\mathrm{n} = 5{,}6, \ldots, 20$ все концы ломаных лежали на некоторой винтовой линии.

Рисунок 1 – Выпуклая оболочка ломаной

Поэтому есть основания предполагать, что искомая кривая есть один виток винтовой линии вместе с отрезком, соединяющим концы этой линии. Осталось найти параметры этой кривой. Векторное уравнение винтовой линии имеет вид $\mathrm{r} = \{\mathrm{a}\cos\mathrm{t}, \mathrm{a}\sin\mathrm{t}, \mathrm{b}\,\mathrm{t}\}$, где $\mathrm{t} = 0 \ldots 2\pi$. Выпуклая оболочка одного витка винтовой линии имеет вид (рисунок 2).

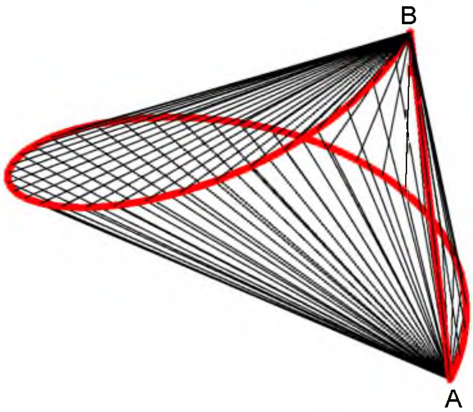

Рисунок 2 – Выпуклая оболочка кривой

По условию длина всей кривой равна 1. Поэтому

$$\mathrm{l} = 2\pi\sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}\text{^}2} + 2\,\mathrm{b}\,\pi = 1. \quad (1)$$

Чтобы вычислить объем этой фигуры, заметим, что эта фигура описывается треугольником с основанием AB (рисунок 2) и вершиной, которая движется по винтовой линии. Площадь этого треугольника

можно вычислить с помощью векторного произведения $[r - A, r - B] = [-2\pi ab \sin t, 2\pi ab (\cos t - 1), 0]$.
Тогда

$$S = \frac{\pi a\, b\sqrt{2 - 2\cos t}}{2},$$

объем фигуры $V = \int_0^{2\pi} S\, ds = 8\pi\, a\, b\sqrt{a^2 + b^2}$. Осталось найти максимум $V = 8\pi\, a\, b\sqrt{(a^2 + b^2)}$ при ограничениях (1). Эта простая задача была решена и параметры получились следующие

$$a = \frac{1}{2\sqrt[4]{5}\,\pi} \approx 0.106433, b = \frac{5 - \sqrt{5}}{20\,\pi} \approx 0.0439893$$

и $V = \frac{1}{5\sqrt[4]{5}\pi^2} \approx 0.0135515$. Любопытно, что $\frac{a}{b} = \frac{(\sqrt{5}+1)\sqrt[4]{5}}{2}$, где a и b параметры винтовой линии, и $\frac{a}{b} = \tau\sqrt[4]{5}$, где $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Здесь τ есть знаменитое золотое отношение. Ранее [1] искомые замкнутые кривые рассматривались в другом классе кривых. Объем выпуклой оболочки этой кривой оказался равным $V = 0.00375773$, что в 3.6 раза меньше найденного.

Библиографический список

1. Кизбикенов К.О. Замкнутая цилиндрическая кривая постоянной длины, выпуклая оболочка выпуклая оболочка которой имеет наибольший объем // МАК–2007: тезисы региональной конференции по математике. – Барнаул, 2007.

УДК 514.765

О конформно плоских алгебраических солитонах Риччи на метрических группах Ли

П.Н. Клепиков, Д.Н. Оскорбин
АлтГУ, г. Барнаул

Исследованию многообразий постоянной кривизны Риччи, или эйнштейновых многообразий, посвящены работы многих математиков (см., например, [1–6]). В последнее время изучаются различные обобщения многообразий Эйнштейна, одними из которых являются солитоны Риччи, впервые рассмотренные Р. Гамильтоном в работе [7].

В общем случае задача изучения, исследования и классификации солитонов Риччи на многообразиях является довольно сложной. Поэтому предполагаются ограничения либо на строение многообразия, либо на класс рассматриваемых метрик, либо на размерность многообразия, либо на класс векторных полей, участвующих в записи уравнения солитона Риччи.

Одним из естественных ограничений является предположение, что рассматриваемое многообразие является однородным пространством и, в частности, группой Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой [8–10]. В этом направлении известен ряд результатов. Так, например, на группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой, размерности не более четырех, не существует нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи. Аналогичный факт известен для унимодулярных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой любой конечной размерности. Вопрос о существовании нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи на группах Ли размерности более четырех с левоинвариантной римановой метрикой до сих пор остается открытым (см. [11–14]).

Другим важным примером являются алгебраические солитоны Риччи на группах Ли, которые впервые были рассмотрены Х. Лауре. Им же было доказано, что каждый алгебраический солитон Риччи на группе Ли с левоинвариантной римановой метрикой является однородным солитоном Риччи (см. [15]). Позднее этот результат был обобщен К. Онда на случай групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой (см. [16]).

Определение. Группа Ли G с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой g и метрической алгеброй Ли $L(G)$ называется *алгебраическим солитоном Риччи*, если метрика g удовлетворяет уравнению:

$$\rho = \Lambda \cdot Id + D,$$