можно вычислить с помощью векторного произведения $[r - A, r - B] = [-2\pi ab \sin t, 2\pi ab (\cos t - 1), 0]$.
Тогда

$$S = \frac{\pi a\, b\sqrt{2 - 2\cos t}}{2},$$

объем фигуры $V = \int_0^{2\pi} S\, ds = 8\pi\, a\, b\sqrt{a^2 + b^2}$. Осталось найти максимум $V = 8\pi\, a\, b\sqrt{(a^2 + b^2)}$ при ограничениях (1). Эта простая задача была решена и параметры получились следующие

$$a = \frac{1}{2\sqrt[4]{5}\,\pi} \approx 0.106433, b = \frac{5 - \sqrt{5}}{20\,\pi} \approx 0.0439893$$

и $V = \frac{1}{5\sqrt[4]{5}\pi^2} \approx 0.0135515$. Любопытно, что $\frac{a}{b} = \frac{(\sqrt{5}+1)\sqrt[4]{5}}{2}$, где a и b параметры винтовой линии, и $\frac{a}{b} = \tau\sqrt[4]{5}$, где $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Здесь τ есть знаменитое золотое отношение. Ранее [1] искомые замкнутые кривые рассматривались в другом классе кривых. Объем выпуклой оболочки этой кривой оказался равным $V = 0.00375773$, что в 3.6 раза меньше найденного.

Библиографический список

1. Кизбикенов К.О. Замкнутая цилиндрическая кривая постоянной длины, выпуклая оболочка выпуклая оболочка которой имеет наибольший объем // МАК–2007: тезисы региональной конференции по математике. – Барнаул, 2007.

УДК 514.765

О конформно плоских алгебраических солитонах Риччи на метрических группах Ли

П.Н. Клепиков, Д.Н. Оскорбин
АлтГУ, г. Барнаул

Исследованию многообразий постоянной кривизны Риччи, или эйнштейновых многообразий, посвящены работы многих математиков (см., например, [1–6]). В последнее время изучаются различные обобщения многообразий Эйнштейна, одними из которых являются солитоны Риччи, впервые рассмотренные Р. Гамильтоном в работе [7].

В общем случае задача изучения, исследования и классификации солитонов Риччи на многообразиях является довольно сложной. Поэтому предполагаются ограничения либо на строение многообразия, либо на класс рассматриваемых метрик, либо на размерность многообразия, либо на класс векторных полей, участвующих в записи уравнения солитона Риччи.

Одним из естественных ограничений является предположение, что рассматриваемое многообразие является однородным пространством и, в частности, группой Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой [8–10]. В этом направлении известен ряд результатов. Так, например, на группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой, размерности не более четырех, не существует нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи. Аналогичный факт известен для унимодулярных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой любой конечной размерности. Вопрос о существовании нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи на группах Ли размерности более четырех с левоинвариантной римановой метрикой до сих пор остается открытым (см. [11–14]).

Другим важным примером являются алгебраические солитоны Риччи на группах Ли, которые впервые были рассмотрены Х. Лауре. Им же было доказано, что каждый алгебраический солитон Риччи на группе Ли с левоинвариантной римановой метрикой является однородным солитоном Риччи (см. [15]). Позднее этот результат был обобщен К. Онда на случай групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой (см. [16]).

Определение. Группа Ли G с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой g и метрической алгеброй Ли $L(G)$ называется *алгебраическим солитоном Риччи*, если метрика g удовлетворяет уравнению:

$$\rho = \Lambda \cdot Id + D,$$

где ρ – матрица оператора Риччи, Λ – константа, Id – единичная матрица, D – матрица оператора некоторого дифференцирования алгебры $L(G)$.

В данной работе исследуется вопрос о строении алгебраических солитонов Риччи на группах Ли с левоинвариантной конформно плоской, т.е. с тривиальным тензором Вейля, (псевдо)римановой метрикой. Основным результатом работы является следующая

Теорема. Пусть G – группа Ли с левоинвариантной конформно плоской (псевдо)римановой метрикой g размерности $n \geq 4$ и диагонализируемым оператором Риччи ρ. Тогда, если (G, g) – алгебраический солитон Риччи, то (G, g) – тривиальный солитон Риччи.

В случае групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой оператор Риччи всегда диагонализируем, т.к. его матрица в ортонормированном базисе симметрична. А значит, справедливо

Следствие. Пусть G – группа Ли с левоинвариантной конформно плоской римановой метрикой g размерности $n \geq 4$. Тогда, если (G, g) – алгебраический солитон Риччи, то (G, g) – тривиальный солитон Риччи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты: № 16–01–00336А, № 16–31–00048мол_а), Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

Библиографический список

1. Бессе А. Многообразия Эйнштейна: в 2 т. пер. с англ. – М.: Мир. – 1990.
2. Rodionov E.D. Standard homogeneous Einstein manifolds // Доклады Академии наук. – 1993. – Т. 328, № 2. – С. 147.
3. Родионов Е.Д., Славский В.В. Одномерная секционная кривизна римановых многообразий // Доклады Академии наук. – 2002. – Т. 387, № 4. – С. 454.
4. Родионов Е.Д., Славский В.В., Чибрикова Л.Н. Левоинвариантные лоренцевы метрики на 3-мерных группах Ли с нулевым квадратом длины тензора Схоутена-Вейля // Вестник Алтайского государственного педагогического университета. – 2004. – № 4–3. – С. 53–60.
5. Воронов Д.С., Родионов Е.Д. Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных неунимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля // Доклады Академии наук. – 2010. – Т. 432, № 3. – С. 301–303.
6. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О спектре оператора кривизны конформно плоских римановых многообразий // Доклады Академии наук. – 2013. – Т. 450, № 2. – С. 140.
7. Hamilton R.S. The Ricci flow on surfaces // Contemporary Mathematics. – 1988. – Vol. 71. – P. 237–262.
8. Клепиков П.Н., Хромова О.П. Применение пакетов аналитических вычислений к исследованию конциркулярно-гармонических свойств 3-мерных групп Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой // Сборник научных статей международной молодежной школы-семинара «Ломоносовские чтения на Алтае», Барнаул, 5–8 ноября, 2013 в 6 частях / под ред. Е.Д. Родионова. – Барнаул, 2013. С. 133–139.
9. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Обобщенные базисы Милнора некоторых четырехмерных метрических алгебр Ли // Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования : сборник научных статей международной конференции. – Барнаул, 2014. – С. 298–302.
10. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Применение пакетов символьных вычислений при исследовании инвариантных тензорных полей на метрических группах Ли // Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование тезисы докладов международной научной конференции / Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук и Правительства Республики Северная Осетия-Алания. – Владикавказ 2014. – С. 116–117.
11. Cerbo L.F. Generic properties of homogeneous Ricci solitons // Adv. Geom. – 2014. – Vol. 14(2). – P. 225–237.
12. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Однородные инвариантные солитоны Риччи на четырехмерных группах Ли // Известия Алтайского государственного университета. – 2015. – № 1/2. – С. 115–122.
13. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. Об однородных инвариантных солитонах Риччи на четырехмерных группах Ли // МАК–2015: «Математики – Алтайскому краю» : сборник трудов всероссийской конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2015. – 246 с.
14. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. Об однородных солитонах Риччи на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // Доклады Академии наук. – 2015. – Т. 465, № 3. – С. 281.
15. Lauret J. Ricci soliton homogeneous nilmanifolds // Math. Ann. – 2001. – Vol. 319, №4. – P. 715–733.
16. Onda K. Examples of Algebraic Ricci Solitons in the Pseudo-Riemannian Case // Acta Mathematica Hungarica. – 2014. – Vol. 144, №1. – P. 247–265.