References

1. Lacomba E. Mechanical systems with symmetry on homogeneous spaces // Trans. Amer. Math. Soc., 185, 477–491 (1974).
2. Meshcheryakov M.V. Several remarks on Hamiltonian flows on homogeneous spaces // Usp. Mat. Nauk, 40, No. 3, 215–216 (1985).
3. Besse A.L., Manifolds All of Whose Geodesics are Closed [Russian translation], Mir, Moscow (1981).
4. Rodionov E. D. Homogeneous Riemannian Z-manifold // Sib. Mat. Zh., 22, №2, 191–197 (1981).
5. E. D. Rodionov, Structure of Homogeneous Riemannian Z-Manifolds, Dissertation [in Russian], Inst. Math. Sib. Department Russ. Acad. Sci., Novosibirsk (1982).
6. W. Klingenberg, Lectures on Closed Geodesics [Russan translation], Mir, Moscow (1982).
7. McCleary Y. and Ziller W. On the free loop space of homogeneous spaces // Amer. J. Math., 109, 765–781 (1987); correction: Amer. J. Math., 113, 375–377 (1991).
8. Rodionov E. D. Closures of geodesic curves of compact naturally reductive spaces // Proc. Conf. Dedicated to the Memory of N.I. Lobachevskii [in Russian], Kazan (1993).
9. Kowalski O.and Szenthe J. On the existence of homogeneous geodesics in homogeneous Riemannian manifolds // Geom. Dedic., 81, 209–214 (2000); correction: Geom. Dedic., 84, 331–332 (2001).
10. Kaplan A. On the geometry of groups of Heisenberg type // Bull. London Math. Soc., 15, 35–42 (1983).
11. Berndt J., Kowalski O. and Vanhecke L. Geodesics in weakly symmetric spaces // Ann. Global Anal. Geom., 15, 153–156 (1997).
12. Wang M. and Ziller W. On isotropy irreducible Riemannian manifolds // Acta Math., 166, 223–261 (1991).
13. Kowalski O. and Vanhecke L. Riemannian manifolds with homogeneous geodesics // Boll. Unione Mat. Ital. VII. Ser. B, 5, №1, 189–246 (1991).
14. Gordon C. Homogeneous manifolds whose geodesics are orbits // Topics in Geometry. In Memory of J. D'Atri, Birkh.auser, Boston (1996), pp. 155–174.
15. D.Alekseevsky and A.Arvanitoyeorgos, «Metrics with homogeneous geodesics on flag manifolds», Commun. Math. Univ. Carol., 43, №2, pp. 189–199 (2002).
16. Rodionov E.D. Standard homogeneous Einstein manifolds // Доклады Академии наук. – 1993. – Т. 328, № 2. – С. 147.
17. Родионов Е.Д., Славский В.В. Одномерная секционная кривизна римановых многообразий // Доклады Академии наук. – 2002. – Т. 387, № 4. – С. 454.
18. Родионов Е.Д., Славский В.В., Чибрикова Л.Н. Левоинвариантные лоренцевы метрики на 3-мерных группах Ли с нулевым квадратом длины тензора Схоутена-Вейля // Вестник Алтайского государственного педагогического университета. – 2004. – № 4–3. – С. 53–60.
19. Воронов Д.С., Родионов Е.Д. Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных неунимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля // Доклады Академии наук. – 2010. – Т. 432, № 3. – С. 301–303.
20. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О спектре оператора кривизны конформно плоских римановых многообразий // Доклады Академии наук. – 2013. – Т. 450, № 2. – С. 140.
21. Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В. Геометрия однородных римановых многообразий // Современная математика и ее приложения. – 2006. – Т. 37, С. 1–78.
22. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. Об однородных солитонах Риччи на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // Доклады Академии наук. – 2015. – Т. 465, № 3. – С. 281.
23. Родионов Е.Д. Однородные римановы многообразия с метрикой Эйнштейна / автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук / Новосибирск, 1994.
24. Rodionov E.D. Simply connected compact five-dimensional homogeneous Einstein manifolds // Siberian Mathematical Journal. – 1994. – Т. 35. – С.163–168.
25. Nikonorov Y.G., Rodionov E.D. Standard homogeneous Einstein manifolds and Diophantine equations // Archiv der Mathematik. – 1996. – Т. 32. – С. 23–26.

УДК 514.172

Двойственность для конформно-плоских метрик неотрицательной кривизны

***Е.Д. Родионов*[1], *В.В. Славский*[2], *М.В. Куркина*[2]**

[1] АлтГУ, г. Барнаул; [2]ЮГУ, г. Ханты-Мансийск

В теории выпуклых подмножеств векторного пространства важную роль играет двойственность Минковского [1]. Для конформно-плоских метрик можно определить аналог этого понятия.

Пусть $ds^2 = \dfrac{dx^2}{f^2(x)}$ конформно-плоская метрика, заданная на расширенной плоскости $x \in \overline{R^n} = S^n$. Сопоставим ей двойственную конформно-плоскую метрику $ds^{*2} = \dfrac{dy^2}{f^{*2}(y)}$, используя преобразование $\mathbb{F}: \{x, f(x)\} \to \{y, f^*(y)\}$, где;

$$y = x - \frac{2f(x)\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|^2}, \quad f^*(y) = \frac{2f(x)}{|\nabla f(x)|^2}.$$

Свойства преобразования $\mathbb{F}$.

- Если функция $f(x)$ от аргумента x класса C^2, то и функция $f^*(y)$ от аргумента y будет также класса C^2 (при условии положительности одномерной секционной кривизны).
- Главные значения одномерных секционных кривизн [3] метрик ds^2 и ds^{*2} связаны в соответствующих точках равенством
  $k_i k^*_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$.
- Конформно-плоская метрика положительной одномерной кривизны переходит в конформно-плоскую метрику положительной кривизны.
- Преобразование $\mathbb{F}$ иволютивно, то есть $\mathbb{F}^2 = 1$.
- Преобразование $\mathbb{F}$ для конформно-плоских метрик с неотрицательной одномерной секционной кривизной [2] может быть определено без требования гладкости класса C^2 метрик.

Работа выполнена при поддержке грантов НШ 2263.2014.1, гранта 14.B25.31.0029 правительства РФ, РФФИ 15-41-00092 р-урал-а, 15-41-00063 р-урал-а, 15-01-06582-а, 16-01-00336.

Библиографический список

1. Кутателадзе С.С., Рубинов А.М. Двойственность Минковского и ее приложения. – Новосибирск: Наука, 1976. – 250 с.

2. Куркина М.В., Родионов Е.Д., Славский В.В. Конформно-выпуклые функции и конформно-плоские метрики неотрицательной кривизны // Доклады Академии наук. 2015. Т. 462. № 2. С. 141.

3. Nikonorov Yu.G., Rodionov E.D., Slavskii V.V. Geometry of homogeneous riemannian manifolds // Journal of Mathematical Sciences. – 2007. – Т. 146, №6.– С. 6313–6390.

УДК 519.3

Применение штрафных функций в решении экстремальных задач с ограничениями

А.В. Гончарова, Т.В. Саженкова
АлтГУ, г. Барнаул

В работе представлено исследование класса функций на их принадлежность к внешним штрафным функциям, для решения задач выпуклого программирования.

Здесь рассматривается задача выпуклого программирования в следующем виде: найти минимум выпуклой функции f на компакте $D \subset R^n$, задаваемом системой неравенств $g_j(x) \le 0$, j = 1, 2, …, m, с выпуклыми функциями g_j.

При этом предполагается дважды дифференцируемость функций f и g_j, и существование такой точки x_0, что $g_j(x_0) < 0$ для всех j.

Для решения задачи методом внешних штрафных функций проводится исследование класса функций, введенных А.А. Капланом [1]:

$$\Phi_k(x) = A_k \sum_{j=1}^{m} (g_j(x) + \sqrt{g_j^2(x) + A_k^{-2}}\ ), \qquad (1.1)$$

где $g_j(x) \le 0,\ j \in J$, $A_k > 0$, $A_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Теорема. Функции $\Phi_k(x) = A_k \sum_{j=1}^{m} (g_j(x) + \sqrt{g_j^2(x) + A_k^{-2}}\ )$ в указанных выше условиях обладают свойствами: