Пусть $ds^2 = \dfrac{dx^2}{f^2(x)}$ конформно-плоская метрика, заданная на расширенной плоскости $x \in \overline{R^n} = S^n$. Сопоставим ей двойственную конформно-плоскую метрику $ds^{*2} = \dfrac{dy^2}{f^{*2}(y)}$, используя преобразование $\mathbb{F}: \{x, f(x)\} \to \{y, f^*(y)\}$, где;

$$y = x - \frac{2f(x)\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|^2}, \qquad f^*(y) = \frac{2f(x)}{|\nabla f(x)|^2}.$$

Свойства преобразования $\mathbb{F}$.

- Если функция $f(x)$ от аргумента x класса C^2, то и функция $f^*(y)$ от аргумента y будет также класса C^2 (при условии положительности одномерной секционной кривизны).
- Главные значения одномерных секционных кривизн [3] метрик ds^2 и ds^{*2} связаны в соответствующих точках равенством
  $k_i k^*_i = 1$, $i = 1,\ldots,n$.
- Конформно-плоская метрика положительной одномерной кривизны переходит в конформно-плоскую метрику положительной кривизны.
- Преобразование $\mathbb{F}$ иволютивно, то есть $\mathbb{F}^2 = 1$.
- Преобразование $\mathbb{F}$ для конформно-плоских метрик с неотрицательной одномерной секционной кривизной [2] может быть определено без требования гладкости класса C^2 метрик.

Работа выполнена при поддержке грантов НШ 2263.2014.1, гранта 14.B25.31.0029 правительства РФ, РФФИ 15-41-00092 р-урал-а, 15-41-00063 р-урал-а, 15-01-06582-а, 16-01-00336.

Библиографический список

1. Кутателадзе С.С., Рубинов А.М. Двойственность Минковского и ее приложения. – Новосибирск: Наука, 1976. – 250 с.
2. Куркина М.В., Родионов Е.Д., Славский В.В. Конформно-выпуклые функции и конформно-плоские метрики неотрицательной кривизны // Доклады Академии наук. 2015. Т. 462. № 2. С. 141.
3. Nikonorov Yu.G., Rodionov E.D., Slavskii V.V. Geometry of homogeneous riemannian manifolds // Journal of Mathematical Sciences. – 2007. – Т. 146, №6.– С. 6313–6390.

УДК 519.3

Применение штрафных функций в решении экстремальных задач с ограничениями

А.В. Гончарова, Т.В. Саженкова
АлтГУ, г. Барнаул

В работе представлено исследование класса функций на их принадлежность к внешним штрафным функциям, для решения задач выпуклого программирования.

Здесь рассматривается задача выпуклого программирования в следующем виде: найти минимум выпуклой функции f на компакте $D \subset R^n$, задаваемом системой неравенств $g_j(x) \le 0$, j = 1, 2, …, m, с выпуклыми функциями g_j .

При этом предполагается дважды дифференцируемость функций f и g_j , и существование такой точки x_0, что $g_j(x_0) < 0$ для всех j.

Для решения задачи методом внешних штрафных функций проводится исследование класса функций, введенных А.А. Капланом [1]:

$$\Phi_k(x) = A_k \sum_{j=1}^{m} (g_j(x) + \sqrt{g_j^2(x) + A_k^{-2}}\ ), \qquad (1.1)$$

где $g_j(x) \le 0,\ j \in J$, $A_k > 0$, $A_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Теорема. Функции $\Phi_k(x) = A_k \sum_{j=1}^{m} (g_j(x) + \sqrt{g_j^2(x) + A_k^{-2}}\ )$ в указанных выше условиях обладают свойствами:

1) $\Phi_k : R^n \to R$ – выпуклые функции;

2) $\lim\limits_{k\to\infty} \Phi_k(x) = 0,$ если $x \in int D$;

3) $\lim\limits_{k\to\infty} \Phi_k(x) = +\infty,$ если $x \notin D$;

4) начиная с некоторого *K*, функции $F_k(x) = f(x) + \Phi_k(x)$ достигают своего безусловного минимума. Последовательность точек минимума функций $F_k (k \ge K)$ имеет предельные точки; любая предельная точка этой последовательности принадлежит множеству *D* и доставляет минимум *f*.

Доказательство.

1) Представим исследуемые функции в следующем виде:

$$\Phi_k = \sum_{j\in J} \psi_k(g_j(x)), \tag{1.2}$$

где $\psi_k(s) = A_k(s + \sqrt{s^2 + A_k^{-2}}$).

Поскольку Φ_k – дважды дифференцируемые функции, имеем

$$\nabla^2 \Phi_k(x) = \sum_{j\in J} \nabla^2 \psi_k(g_j(x)).$$

Исследуем $\psi_k(s)$ на выпуклость с помощью второй производной:

$$\psi_k^{'}(s) = A_k + A_k\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{s^2 + A_k^{-2}}}\cdot 2s\right) = A_k\left(\frac{s}{\sqrt{s^2 + A_k^{-2}}}\right); \psi_k^{''}(s) = A_k\left(\frac{\sqrt{s^2 + A_k^{-2}} - s\cdot\dfrac{s}{\sqrt{s^2 + A_k^{-2}}}}{s^2 + A_k^{-2}}\right) = \frac{\dfrac{s^2 + A_k^{-2} - s^2}{\sqrt{s^2 + A_k^{-2}}}}{s^2 + A_k^{-2}} =$$

$$= \frac{1}{A_k^2\left(s^2 + \dfrac{1}{A_k^2}\right)\sqrt{s^2 + \dfrac{1}{A_k^2}}}.$$

Так как $A_k > 0$ и $A_k \to 0$ при $k \to \infty$, то $\psi_k^{''} > 0$.

Таким образом, $\psi_k(s)$ – выпуклая, а т.к. g_j выпуклы по условию, то суперпозиция $\psi_k(g_j(x))$ является выпуклой функцией для любых *k* и *j*. Тогда $\sum\limits_{j\in J} \psi_k(g_i(x))$ – выпуклая функция, как сумма выпуклых функций.

Для доказательства пунктов 2) – 3) опять воспользуемся представлением функций (1.1) в виде (1.2) и введем вспомогательную функцию $\psi_k^*(s) = A_k\left(s + \sqrt{s^2}\right) = A_k\left(s + |s|\right)$.

Очевидно, что $\psi_k(s) \ge \psi_k^*(s)$.

Для функций $\psi_k^{(t)}(s) = A_k(s + \sqrt{s^2 + A_k^{-2-t}})$, t>0, в работе [2] получена справедливость пунктов 2) – 3).

Теперь рассмотрим

$$0 \le \psi_k(s) - \psi_k^*(s) = \psi_k(s) - \psi_k^{(t)}(s) + \psi_k^{(t)}(s) - \psi_k^*(s).$$

При t>0 имеет место следующее стремление: $\psi_k^{(t)}(s) - \psi_k^*(s) \underset{k\to\infty}{\to} 0$, поэтому $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K : k \ge K \quad \left|\psi_k^{(t)}(s) - \psi_k^*(s)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

С другой стороны, $\psi_k(s) = \lim\limits_{t\to 0} \psi_k^{(t)}(s) = \lim\limits_{t\to 0} A_k(s + \sqrt{s^2 + A_k^{-2-t}})$. Следовательно, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists t_0 > 0 : 0 < t < t_0 \quad \left|\psi_k(s) - \psi_k^{(t)}(s)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K : k \ge K \quad \left|\psi_k(s) - \psi_k^*(s)\right| < \varepsilon$, то есть $\psi_k(s) - \psi_k^*(s) \underset{k\to\infty}{\to} 0$.

Итак, имеем:

2) если $x \in D$, т.е. $g_j(x) \le 0, j \in J$, то $\psi_k^*(s) = A_k\left(s + |s|\right) = 0 \quad (s = g_j(x))$, а значит $\psi_k(s) \underset{k\to\infty}{\to} 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \Phi_k(x) = 0$ при $x \in D$;

3) если $x \notin D$, т.е. $g_j(x) > 0$, то $\psi_k^*(s) = A_k(s + |s|) > 0$, $\psi_k^*(s) \underset{k\to\infty}{\to} \infty \, (s = g_j(x))$. А значит $\psi_k(s) \underset{k\to\infty}{\to} \infty$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \Phi_k(x) = +\infty$ при $x \in R^n \setminus D \; (x \notin D)$.

Выполнение пункта 4) при выполнении 1) – 3) и условий теоремы следует из соответствующей теоремы сходимости, представленной в [3].

Библиографический список

1. Гроссман К., Каплан А.А. Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации. – Новосибирск: Наука, 1981.

2. Карпова И. С., Саженкова Т. В. О применении некоторых классов штрафных функций в решении нелинейных задач с ограничениями // Сборник трудов молодых учёных. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2015. Вып. 12.

3. Фиакко А., Мак-Кормик А.Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. – М.: Мир, 1972.

УДК 519.237.8

Диапазон значений коэффициента бинарной согласованности

С.А. Шепелев, С.В. Дронов

АлтГУ, г. Барнаул

В приложениях, особенно медицинских, разбиение объектов на две группы часто основано на значениях некоторой числовой переменной *U*. При этом известны нормативные границы *a,b* значений этой переменной, между которыми объект обязан относиться к одной из групп (норма), а вне этих границ к другой (патология). В этом смысле одна группа имеет «непрерывную структуру», а другая как бы состоит из двух частей.

Введем в рассмотрение две бинарных переменных *X* и *Y*. Считаем, что *Y*=1 при попадании *U* в нормативные границы. Требуется на основе изучения выборочных данных установить или опровергнуть наличие связи между *X* и *U* (или *X* и *Y*, что в нашем случае одно и то же), а также оценить силу этой связи с помощью некоторого коэффициента, который в случае отсутствия связи должен равняться 0, а в случае предельно сильной связи 1. Связи подобного рода изучались в [1–2], но там нормативные границы не фиксировались, а подбирались в процессе анализа, что для практических задач не всегда возможно.

В идеальном случае внутри нормативного отрезка все значения *X* должны быть равны единице и нулю за его пределами. Но встречается в некотором смысле обратная ситуация, в которой значения *X* равны единице чаще вне нормативного интервала и равны нулю чаще внутри него. Тогда единицу следует считать нулем и наоборот.

Имея это в виду, сделаем далее предположение, что за 1 обозначено то из двух значений *X*, которых не меньше в интервале *[a,b]*, и не больше вне него, чем других его значений.

Возможны ситуации, например, когда одно из значений *X* имеет перевес по численности как внутри, так и вне отрезка. Тогда становится неясно, какое из значений следует считать единицей. Но такая ситуация, очевидно, означает, что значениями *X* ни одна из групп не выделяется уверенно. С этой точки зрения разумным будет здесь сразу сделать вывод об отсутствии изучаемой связи. Иначе характеристикой силы изучаемой связи может служить доля единиц среди значений внутри интервала при учете доли нулей вне этого интервала.

Пусть нормативные границы *a, b* заданы и среди значений *X* выбрано то, которое примем за 1. Введём для заданной бинарной цепочки *X* число, которое назовем коэффициентом бинарной согласованности:

$$\boldsymbol{Z}(X) = 2 \cdot \frac{\sum\limits_{i \notin [a,b]} (1 - x_i) + \sum\limits_{i \in [a,b]} x_i}{n} - 1 . \qquad (1)$$

Теорема 1. Коэффициент бинарной согласованности, определяемый формулой (1), принимает значения между 0 и 1.

Далее решим задачу полного описания множества значений введенного коэффициента.

Лемма. Минимальные по величине изменения коэффициента бинарной согласованности $\boldsymbol{Z}(X) \neq 0$ возникают лишь тогда, когда ровно один символ цепочки *X* меняется на противоположный.