2. Петрова А.Г., Железняк М.Н., Янцен В.В. Автомодельные режимы протаивания насыщенного мёрзлого грунта при выпадении дождя // Известия Алтайского государственного университета. 2014. № 1/1 (81). – С. 109–113.

3. Васильев В.И., Максимов А.М., Петров Е.Е., Ципкин Г.Г. Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. – М., 1996.

4. Мейрманов А.М. Задача Стефана. – Новосибирск, 1999. – Т. 40, №3.

5. Петрова А.Г., Алейников А.С., Бочкарева Ю.А., Михина Д.Л. О точных решениях задачи протаивания грунта под действием инфильтрации осадков // МАК–2015: Сборник трудов всероссийской конференции по математике. – Барнаул, 2015. – С. 75–78.

УДК 551.345+539.3

Точное автомодельное решение задачи о влагопереносе в деформируемом грунте

И.Г. Ахмерова
АлтГУ, г. Барнаул

Рассматривается процесс фильтрации воды и воздуха в деформируемом грунте. Грунт является трехфазной средой, состоящей из воды $(i=1)$, воздуха $(i=2)$ и твердой деформируемой пористой среды $(i=3)$. Уравнения сохранения массы для каждой из фаз, закон Дарси для воды и воздуха и закон сохранения импульса для твердой матрицы с учетом принципа Терцаги, обобщенного закона Гука и эффекта капиллярных сил имеют вид [1, 2]:

$$\frac{\partial(\rho_i^0 s_i m)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_i^0 s_i m u_i)}{\partial x}=0, \quad i=1,2;$$

$$\frac{\partial(\rho_3^0(1-m))}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_3^0(1-m)u_3)}{\partial x}=0;$$

$$ms(u_1-u_3)=-K_0\frac{k_{01}}{\mu_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}+\rho_1^0 g\right), \quad s_1\equiv s, \quad s_2\equiv 1-s;$$

$$m(1-s)(u_2-u_3)=-K_0\frac{k_{02}}{\mu_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x}+\rho_2^0 g\right), \quad p_1-p_2=p_c(s);$$

$$\frac{\partial\sigma_{kl}^f}{\partial x}-(1-m)\frac{\partial P}{\partial x}-(p_1-p_2)m\frac{\partial s}{\partial x}+K_{23}(u_2-u_3)+$$
$$+K_{13}(u_1-u_3)+\rho_3^0(1-m)g=0;$$

$$\sigma_{kl}^f=(1-m)(\lambda_1 e\delta_{kl}+2\lambda_2 e_{kl}+\beta_s K p_c(s)\delta_{kl}).$$

Здесь u_i – скорость i-ой фазы, ρ_i – приведенная плотность, связанная с истинной плотностью ρ_i^0 и объемной концентрацией α_i соотношением $\rho_i=\alpha_i\rho_i^0$ ($\alpha_1=ms_1, \alpha_2=ms_2, \alpha_3=1-m$); s_1, s_2 – насыщенности воды и воздуха; m – пористость грунта; K_0 – тензор фильтрации; k_{0i} – относительные фазовые проницаемости; μ_i – вязкость i-ой фазы; p_i – давление i-ой фазы; $p_c(s)$ – равновесное капиллярное давление; σ_{kl}^f – полное эффективное напряжение при двухфазном насыщении среды ($\sigma_{kl}^f=\Gamma_{kl}+P\delta_{kl}$); Γ_{kl} – полное напряжение в среде ($\Gamma_{kl}=(1-m)\sigma_{kl}-msp_1\delta_{kl}-m(1-s)p_2\delta_{kl}$); σ_{kl} – истинное напряжение твердой фазы, δ_{kl} – единичный тензор, P – полное давление первой и второй фазы ($P=sp_1+(1-s)p_2$); K_{ij} – коэффициент взаимодействия фаз; $(1-m)\lambda_1, (1-m)\lambda_2$ – коэффициенты Ламе; $(1-m)K$ – модуль всестороннего сжатия сухой пористой среды; e_{kl} – полная деформация пористой среды ($e_{kl}=e_{kl}^f+e_{kl}^\rho+e_{kl}^s$, $e_{kl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega_k}{\partial x_l}+\frac{\partial\omega_l}{\partial x_k}\right)$, где $\overleftarrow{\omega}$ – вектор перемещения твердых частиц), e_{kl}^ρ – деформация изменения плотности материала твердых частиц ($e_{kl}^\rho=-\frac{1}{3}\beta_3\sigma_{mn}\delta_{mn}\delta_{kl}$, β_3 – коэффициент изотермической сжимаемости материала индивидуальных частиц матрицы), e_{kl}^s –

деформация матрицы из-за изменения капиллярных сил ($e_{kl}^{s} = -\frac{1}{3}\beta_s(p_c(s) - p_c(s_0))\delta_{kl}$, β_s – коэффициент набухания (усадки) матрицы при изменениях насыщенности в силу действия капиллярных сил, $s_0 = 0$ при $x = 0$), $e = tr(e_{kl})$), e_{kl}^{f} – деформация переупаковки (в случае упругого состояния матрицы связаны с эффективным напряжением законом Гука); g – ускорение силы тяжести. Близкие по стуктуре задачи рассматривались в [3–5].

Для данной системы уравнений рассматривается автомодельное решение типа «бегущей волны» в области $(-\infty, ct)$. Предполагая все искомые функции зависящими только от переменной $\xi = x - ct$ (c – неизвестная постоянная). Вектор ускорения в системе координат xyz имеет вид $\overleftarrow{g} = (-g, 0, 0)$. Тогда в одномерном случае исходная система имеет вид:

$$-c\frac{d(\rho_1^0 sm)}{d\xi} + \frac{d(\rho_1^0 smu_1)}{d\xi} = 0,$$

$$-c\frac{d(\rho_2^0(1-s)m)}{d\xi} + \frac{d(\rho_2^0(1-s)mu_2)}{d\xi} = 0,$$

$$-c\frac{d(\rho_3^0(1-m))}{d\xi} + \frac{d(\rho_3^0(1-m)u_3)}{d\xi} = 0; \tag{1}$$

$$ms(u_1 - u_3) = -K_0\frac{k_{01}}{\mu_1}(\frac{dp_1}{d\xi} - \rho_1^0 g); \tag{2}$$

$$m(1-s)(u_2 - u_3) = -K_0\frac{k_{02}}{\mu_2}(\frac{dp_2}{d\xi} - \rho_2^0 g); \tag{3}$$

$$-\frac{\partial p_c}{\partial s}\frac{ds}{d\xi} = \frac{\mu_1}{K_0 k_{01}} msc\frac{1-m^-}{1-m} -$$

$$-\frac{\mu_2}{K_0 k_{02}} m(1-s)c\left(\frac{1-m^-}{1-m} - \frac{m^-}{m(1-s)}\right) + \bar{g}, \bar{g} = g(\rho_1 \tag{4}$$

$$-\frac{dm}{d\xi}((\lambda_1 + 2\lambda_2)e_{11} + \beta_s K p_c(s)) - (1-m)s\frac{dp_c}{d\xi} - ($$

$$-p_c\frac{ds}{d\xi} + (1-m)\left((\lambda_1 + 2\lambda_2)\frac{de_{11}}{d\xi} + \beta_s K\frac{dp_c}{d\xi}\right) +$$

$$+K_{13}(u_1 - u_3) + \rho_3^0(1-m)g = 0; \tag{5}$$

$$-c\frac{de_{11}}{d\xi} = \frac{du_3}{d\xi}, \quad p_1 - p_2 = p_c(s); \tag{6}$$

$$s|_{\xi \to -\infty} = 0, u_i|_{\xi \to -\infty} = 0, p_2(0) = p_2^+, u_i(0) = u_i^+, \quad i \tag{7}$$

Систему уравнений (1)–(7) с учетом дополняющих гипотез $p_1 = p_2$, $p_c = 0$; $g = 0$; $b = 0$ и $K_{23} = 0$ можно привести к виду:

$$-c\frac{d(\rho_1^0 sm)}{d\xi} + \frac{d(\rho_1^0 smu_1)}{d\xi} = 0,$$

$$-c\frac{d(\rho_2^0(1-s)m)}{d\xi} + \frac{d(\rho_2^0(1-s)mu_2)}{d\xi} = 0,$$

$$-c\frac{d(\rho_3^0(1-m))}{d\xi} + \frac{d(\rho_3^0(1-m)u_3)}{d\xi} = 0; \tag{8}$$

$$ms(u_1 - u_3) = -K_0\frac{k_{01}}{\mu_1}(\frac{dp_1}{d\xi}); \tag{9}$$

$$m(1-s)(u_2 - u_3) = -K_0\frac{k_{02}}{\mu_2}(\frac{dp_1}{d\xi}); \tag{10}$$

$$\frac{d}{d\xi}((1-m)(\lambda_1+2\lambda_2)e_{11})-(1-m)\frac{dp_1}{d\xi}+K_{13}(u_1-u_3)=0; \tag{11}$$

$$-c\frac{de_{11}}{d\xi}=\frac{du_3}{d\xi}; \tag{12}$$

$$s|_{\xi\to-\infty}=0, u_i|_{\xi\to-\infty}=0, p_2(0)=p_2^+, u_i(0)=u_i^+, \quad i=1,2,3. \tag{13}$$

Искомыми являются функции $s(\xi)$, $m(\xi)$ и c. Решение задачи (8)–(13) находим следующим образом. Интегрируя уравнения (8) и (12) находим представления для истинных скоростей воды, воздуха и твердой матрицы и e_{11}:

$$u_1=c, u_2=c\left(1-\frac{m^-}{m(1-s)}\right), u_3=c\left(1-\frac{1-m^-}{1-m}\right), e_{11}=u_3+b.$$

Используя представления для скоростей и (9), (10), приходим к уравнению для насыщенности $s(\xi)$:

$$k_{02}\mu_1 msc\frac{1-m^-}{1-m}-k_{01}\mu_2 mc(1-s)\left(\frac{1-m^-}{1-m}-\frac{m^-}{m(1-s)}\right)=0. \tag{14}$$

Замечание. Пусть фазовые проницаемости k_{0i} определены следующим образом

$$k_{0i}=\begin{cases}0, & s_i<0;\\ s_i^{n_i}, & 0<s_i<1;\\ 1, & s_i>1.\end{cases}$$

В этом случае из (14) получим, что $0\le s<1$ при $m\in(0,1)$. Действительно, если $s<0$, то $k_{01}=0$ и из (14) выводим, что $s=0$ и следовательно $s\ge 0$. Если же $s>1$, то $k_{02}=0$ и из (14) приходим к тому, что $s<1$.

Пусть дополнительно $(n_1=n_2=1)$, тогда из (14) находим насыщенность:

$$\frac{m}{1-m}c(1-s)s(\mu_1(1-m^-)-$$

$$-\mu_2(\frac{(m-m^-)-ms(1-m^-)}{m(1-s)}))=0. \tag{15}$$

Так как $0<m<1$, $0<s<1$ и $c<0$, то

$$\mu_1(1-m^-)m(1-s)-\mu_2(m-m^-)+\mu_2 ms(1-m^-)=0,$$

т. е. из (15) следует, что либо $s=0$, либо

$$s=\frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}-\frac{\mu_2(m-m^-)}{(1-m^-)m(\mu_1-\mu_2)}, \quad \mu_1\ne\mu_2, \quad m^-\ne 1. \tag{16}$$

Подставляя (12) в (11) с учетом (9) и представления e_{11}, получим уравнение для пористости $m(\xi)$

$$K_0\frac{k_{01}}{\mu_1(1-m)}(\lambda_1+2\lambda_2)\frac{dm}{d\xi}A=msc(1-m^-)+K_0\frac{k_{01}}{\mu_1}c\frac{1-m^-}{1-m}K_{13},$$

$$A=c(1-m)-(c+1)(1-m^-). \tag{17}$$

Рассмотрим случай, когда $A=0$. В этом случае

$$m=\frac{(1-m^-)+|c|m^-}{|c|},$$

Для выполнения условия $m\in(0,1)$ необходимо, чтобы начальные данные удовлетворяли следующим неравенствам

$$0<\frac{(1-m^-)+|c|m^-}{|c|}<1.$$

Эти неравенства справедливы при $|c|>1$.

Рассмотрим случай $|c|<1$, следовательно $A\ne 0$. Подставляя в уравнение (17) насыщенность из (16), приходим к уравнению для пористости $m(\xi)$ вида:

$$\frac{dm}{d\xi} = F(m),$$

решение которого находится в квадратурах. Таким образом, имея представление для $m(\xi)$, из (16) находим $s(\xi)$. Далее подставляя $m(\xi)$ и $s(\xi)$ в представления для истинных скоростей воды, воздуха и твердой матрицы находим c и, следовательно, решение задачи (8)-(13). Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-08-00291.

Библиографический список

1. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. – М.: Изд-во Недраб., 1970.
2. Ведерников В.В., Николаевский В.Н. Уравнения механики пористых сред, насыщенных двухфазной жидкостью // Изв. АН СССР. – Механика жидкости и газа. – 1978. – Т. 5.
3. Папин А.А., Сибин А.Н., Хворых Д.П. Об одной задаче фильтрации в условиях вечной мерзлоты // МАК-2013: сборник трудов шестнадцатой региональной конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2013. – С. 45–48.
4. Папин А.А., Токарева М.А., Шишмарев К.А. Математические вопросы динамики ледового покрова // Вестник алтайской науки. – 2015. – №1 (23). – С. 161–171.
5. Коробкин А.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Поведение ледового покрова канала под действием поверхностных волн // Известия АлтГУ. – 2012. – №1/1. –С. 55–59.

УДК 536.25

Численное моделирование течений жидкости со свободной границей и динамическим контактным углом

Ю.С. Бунтовых[1], А.В. Закурдаева[1,2], К.В. Лушева[1], О.Н. Гончарова[1,2]

[1]АлтГУ, г. Барнаул; [2]ИТ СО РАН, г. Новосибирск

Задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости в областях с твердыми и границами и границами раздела являются чрезвычайно актуальными в настоящее время ввиду различных важных приложений. Такие задачи связаны с изучением конвективных многофазных течений, течений через пористую среду, испарением капли и стеканием пленки, находящейся на твердой, часто нагреваемой подложке [1]. Нестационарные задачи гидродинамики в областях со свободными границами продолжают оставаться очень сложными с математической точки зрения ввиду проблемы динамического контактного угла. Проблема динамического контактного угла возникает вследствие несовместимости условий на свободной поверхности жидкости и условий прилипания на твердой стенке в окрестности движущейся линии контакта трех фаз. Известны различные способы замыкания постановки задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости при наличии движущейся линии контакта (или точек контакта в двумерном случае). Данные способы включают замену условий прилипания условиями проскальзывания на некотором участке твердой стенки вблизи линии контакта, асимптотический подход, предположения о равенстве угла контакта π или нулю и другие подходы (см., например, [2, 3]). Для некоторых математических моделей, описывающих течения жидкостей с динамическим контактным углом, доказана корректность постановок начально-краевых задач. Разрешимость изучаемой задачи с неизвестной границей и динамическим контактным углом доказана в работе [4]. При этом на твердых стенках области течения условие прилипания заменено условием пропорциональности касательного напряжения разности касательных скоростей жидкости и стенки.

Рассматривается задача о течении жидкости в двумерном случае при условии движущейся с постоянной скоростью точки контакта [4–6]. При этом декартова система координат выбрана таким образом, что вектор ускрения силы тяжести $\boldsymbol{\beta}$ направлен вдоль продольной оси (здесь Ox, см. рисунок 1, рисунок 2). Течение вязкой несжимаемой жидкости со свободной границей исследуются численно на основе математической модели, котора включает уравнения Навье-Стокса, кинематическое и динамическое условия на свободной границе и условия проскальзывания на твердых границах. Построены численные алгоритмы с использованием конечно-разностных схем второго порядка аппроксимации по пространству и времени. Численные эксперименты проведены для жидкостей типа воды, этанола, HFE7100 в условиях нормальной и пониженной гравитации при различных значениях статического контактного угла Φ_0, коэффициентов трения γ, γ_0 и поверхностного натяжения (см. рисунок 3). Численно исследуется зависимость динамического контактного угла Φ от скорости движения точки