

Из расчетов видно, что приближения с одним временем релаксации можно считать удовлетворительно только в узком (один десятый порядок) диапазоне частот. В то же время приближения с тремя и пятью модами позволяют перекрывать диапазон в шесть порядков. И если для трех мод на расчетных зависимостях видны точки перегиба, то для пяти и более мод этого уже не наблюдается.

Таким образом, приведенный анализ показал, что для обеспечения необходимости точности расчетов по реологическим моделям нет необходимости учитывать большое число мод. Для инженерных расчетов достаточен учет трех или пяти релаксационных процессов.

#### Библиографический список

1. Алтухов Ю.А., Гусев А.С., Пышнограй Г. В., Кошелев К.Б. Введение в мезоскопическую теорию текучих полимерных систем: монография. – Барнаул: Изд-во АлтГПА, 2012. – 121 с.
2. Гусев А.С., Макарова М.А., Пышнограй Г.В. Мезоскопическое уравнение состояния полимерных сред и описание динамических характеристик на его основе // Инженерно-физический журнал. – 2005. – Т. 78, №5. – С. 55–61.
3. Мерзликина Д.А., Филип П., Пивоконский Р., Пышнограй Г.В. Многомодовая реологическая модель и следствия для простого сдвига и растяжения // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2013. – Т. 19, №2. – С. 254-261.
4. Pivokonsky R., Zatloukal M., Filip P. On the predictive/fitting capabilities of the advanced differential constitutive equations for branched LDPE melts // J. Non-Newtonian Fluid Mech. – 2006. – V. 135. – P. 58–67.
5. Rolón-Garrido V.H., Pivokonsky R., Filip P., Zatloukal M., Wagner M.N. Modelling elongational and shear rheology of two LDPE melts // Rheol. Acta. – 2009. – V. 48. – P. 691–697.

УДК 536.4

### Исследование конвективных течений в сферическом слое жидкости при ступенчатом нагреве внешней среды

*А.В. Закурдаева<sup>1,2</sup>, О.Н. Гончарова<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>АлтГУ, г. Барнаул; <sup>2</sup>ИТ СО РАН, г. Новосибирск

Исследование динамики и процесса переноса тепла в сферическом слое жидкости, содержащем внутри пузырек газа, связано с изучением свойств так называемых микробаллонов, составляющих основу таких материалов, как сенсibilизаторы эмульсионных взрывчатых веществ и сферопласт [1, 2]. Интерес к подобным проблемам в настоящий момент является достаточно высоким, так как успешное решение таких задач позволит специалистам прогнозировать поведение жидкостей, а соответственно, откроет возможность для улучшения характеристик конечных материалов.

Данная работа посвящена численному исследованию конвективных течений в сферическом слое вязкой несжимаемой жидкости, насыщенной газом [3–5]. Рассматривается сферически симметричная постановка, а описываемый слой, с заключенным внутри него пузырьком газа, имеет две свободные границы: внутренний радиус  $r = R_1(t)$  и внешний радиус  $r = R_2(t)$  (см. рисунок 1).

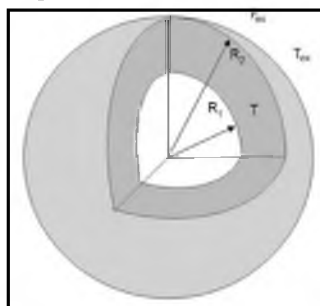


Рисунок 1 – Геометрия области течения

Математическая модель, принятая для описания процессов внутри сферического слоя и включающая в себя уравнения Навье-Стокса, переноса тепла и диффузии газа, подробно описана в [3–5] (см. также [6]). Глобальная разрешимость тепловой задачи доказана в [5].

Решение задачи о динамике жидкого слоя и процессов переноса тепла и диффузии газа в нем осуществлялось численно с использованием метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности (для расчета скорости изменения объема сферического слоя, плотности газа в пузырьке и внутреннего радиуса слоя) и конечно-разностных схем второго порядка аппроксимации (для нахождения функций температуры и концентрации). На каждом временном слое вводится новая пространственная пере-

менная  $x$  для перехода из области с движущимися границами в фиксированную  $(r,t) \rightarrow (x,t)$ . Алгоритм численного расчета в деталях приведен в [7].

Проведены численные эксперименты по формированию микробаллонов жидкого стекла, насыщенного углекислым газом. Числовые значения характерных величин задачи и зависимости коэффициентов переноса от температуры указаны в [8]. В начальный момент времени состояние системы «жидкость – газ» характеризовалось следующими размерами жидкого слоя: внутренний радиус  $R_{10} = 0.02$  см, внешний радиус  $R_{20} = 0.05$  см. Температура предполагалась постоянной  $T_0(r) = T_0(x) = 1171.1$  К, а концентрация газа в жидкости была распределена по параболическому закону ( $C_0(r) = \alpha r^2 + \beta r + \gamma$ , где  $\alpha, \beta, \gamma$  – константы, зависящие от значений концентрации газа на границах области  $R_{10}$  и  $R_{20}$ ). Внешняя атмосфера претерпевала нагрев от  $T_{ex1} = 1171.1$  К до  $T_{ex2} = 1673$  К по закону:

$$\begin{cases} T_{ex} = T_{ex1} + \frac{(T_{ex2} - T_{ex1})}{t_2 - t_1} (t - t_1), t_1 \leq t \leq t_2; \\ T_{ex} = T_{ex2}, t > t_2. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $t_1 = 0$  с,  $t_2 = 0.3$  с,  $T_{ex}$  – внешняя температура.

На рисунке 2 приведены результаты численных расчетов для разных типов внешнего давления  $P_{ex}$  и значений плотности газа в пузырьке в начальный момент времени  $\rho_{g0}$ . Как правило, физическая величина  $P_{ex}$  задавалась постоянной, однако, в одном из случаев (штриховая линия с точкой на рисунке 2) давление внешней среды менялось со временем согласно формуле:

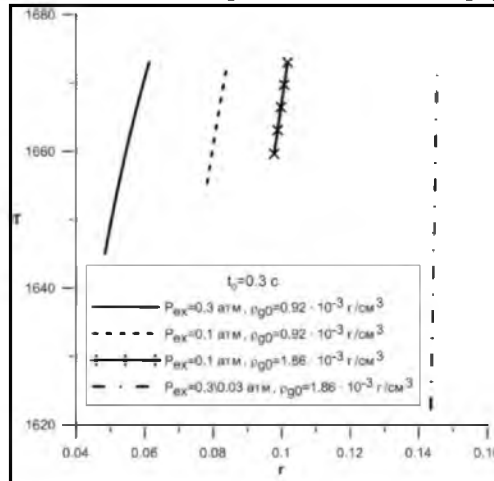


Рисунок 2 – Распределение температуры внутри жидкого слоя в момент времени  $t_0 = 0.3$  с для разных типов внешнего давления и значений плотности газа в пузырьке в начальный момент времени

$$\begin{cases} P_{ex} = P_{ex1} + \frac{(P_{ex2} - P_{ex1})}{t_2 - t_1} (t - t_1), t_1 \leq t \leq t_2; \\ P_{ex} = P_{ex2}, t > t_2. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $t_1 = 0$  с,  $t_2 = 0.3$  с,  $P_{ex1} = 0.3$  атм,  $P_{ex2} = 0.03$  атм. Формула (2) аналогична ступенчатому закону (1) для температуры внешней среды с одной лишь разницей, что внешнее давление понижается с течением времени, а не повышается.

Заметим, что при более высоком давлении внешней среды сферический слой расширяется медленнее, чем в случае, когда давление внешней среды понижено. При этом внутри жидкости наблюдается более широкий диапазон изменения температуры. Увеличение плотности газа в пузырьке в начальный момент времени способствует расширению пузырька, однако на интервал температур фактически не влияет. Оригинальные результаты демонстрирует случай, когда, помимо ступенчатого нагрева внешней атмосферы, в численном эксперименте производилось десятикратное снижение внешнего давления. В данном случае расширение сферической оболочки происходит более интенсивно, и уже за 0.3 с толщина слоя существенно уменьшается. Вместе с тем, наблюдаемый диапазон изменения температуры намного превышает показатели, полученные в ходе других численных экспериментов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-08-00163).

### Библиографический список

1. Аншиц А.Г., Аншиц Н. Н., Дерibas А.А., Караханов С.М., Касаткина Н.С., Пластинин А.В., Решетняк А.Ю., Сильвестров В.В. Скорость детонации эмульсионных взрывчатых веществ с ценосферами // Физика горения и взрыва. – 2005. – Т. 41, № 5. – С. 119–127.
2. Карпов Е.В. Деформирование и разрушение сферопласта в условиях малоциклового нагружения при различных температурах // Прикладная механика и техническая физика. – 2009. – Т. 50, № 1. – С. 197–204.
3. Гончарова О.Н. Математическая модель формирования сферических оболочек в условиях кратковременной невесомости // Динамика сплошной среды. – 1987. – № 82. – С. 66–79.
4. Гончарова О.Н., Пухначев В.В. Диффузионное приближение в задаче формирования сферических микробаллонов в условиях кратковременной невесомости // Моделирование в механике. – 1990. – № 5. – С. 83–95.
5. Гончарова О.Н. Глобальная разрешимость задачи о формировании сферических микробаллонов // Динамика сплошной среды. – 1993. – № 106. – С. 36–48.
6. Резанова Е.В. Численное исследование динамики сферической газосодержащей оболочки // Известия АлтГУ. – 2013. – №1/2 (77). – С. 42–47.
7. Zakurdaeva A.V. Numerical investigation of heat and mass transfer processes in a spherical layer of viscous incompressible liquid with free boundaries // MATEC Web of Conferences (сдана в печать).
8. Закурдаева А.В., Резанова Е.В. Численное исследование влияния давления внешней среды на динамику жидкой сферической оболочки // Омский научный вестник. – 2015. – №3 (143). – С. 312–315.

УДК 517.95+532.546

## Двухфазная фильтрация в пороупругой среде

Ю.С. Зырянова, А.А. Папин

АлтГУ, г. Барнаул

Рассматривается фильтрация двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде (например:  $i=1$  – вода,  $i=2$  – нефть,  $i=3$  – твердый скелет). Для описания процесса используются уравнения сохранения массы для каждой фазы [1], система уравнений двухфазной фильтрации Маскета-Леверетта для жидких фаз с учетом деформации пористого скелета [2, 3], реологическое уравнение для пористости и условие равновесия «системы в целом» [4, 5]

$$\frac{\partial \phi \rho_i^0 s_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i^0 \phi s_i \vec{u}_i) = 0, \quad i=1,2, \quad (1)$$

$$\frac{\partial (1-\phi) \rho_3^0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_3^0 (1-\phi) \vec{u}_3) = 0, \quad (2)$$

$$s_i \phi (\vec{u}_i - \vec{u}_3) = -K_0 \frac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i} (\nabla p_i + \rho_i^0 \vec{g}), \quad i=1,2, \quad (3)$$

$$p_2 - p_1 = p_c(x, s) = \overline{p_c}(\vec{x}) j(s), \quad s \equiv s_1, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \vec{u}_3 = -\frac{1}{\xi(\phi)} p_e - \beta_t(\phi) \left( \frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{u}_3 \cdot \nabla p_e \right), \quad (5)$$

$$\nabla p_{tot} = \rho_{tot} \vec{g}, \quad (6)$$

где  $\phi$  – пористость,  $\rho_i^0$  – истинные плотности,  $\vec{u}_i$ ,  $s_i$  – скорость и насыщенность фаз (доля пор, занятых  $i$ -й фазой,  $i=1,2$ ),  $\vec{u}_3$  – скорость твердого скелета,  $K_0$  – тензор фильтрации (функция пористости),  $\overline{k_{0i}}$  – относительные фазовые проницаемости (функции насыщенностей  $s_i$ ),  $\mu_i$  – коэффициенты динамической вязкости,  $p_i$  – давления фаз,  $\vec{g}$  – вектор ускорения силы тяжести,  $\overline{p_c}(\vec{x})$  – заданная функция точки  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $j(s)$  – функция Леверетта ( $\frac{dj(s)}{ds} \leq 0$ ,  $j(0) = \infty$ ,  $j(1) = 0$ ),  $p_e = p_{tot} - p_f$  – эффективное давление,  $p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi) p_s$  – общее давление,  $p_f = s_1 p_1 + s_2 p_2$ ,  $p_s$  – соответственно давления жидкой и твердой фаз,  $\rho_{tot} = (1-\phi) \rho_3^0 + \phi (s_1 \rho_1^0 + s_2 \rho_2^0)$  – общая плотность;  $\xi(\phi)$  и  $\beta_t(\phi)$  – коэффициенты объемной вязкости и объемной сжимаемости горной породы.

Система (1)–(6) записана в эйлеровых координатах  $\vec{x} \in R^3$ ,  $t \in [0, T]$ . Истинные плотности  $\rho_i^0$  принимаются постоянными. Поскольку  $s_2 = 1 - s_1$ , то неизвестными являются 14 скалярных величин:  $s_1$ ,  $\phi$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_s$ ,  $3\vec{u}_1$ ,  $3\vec{u}_2$ ,  $3\vec{u}_3$ . Для их определения служат также 14 скалярных уравнений.