УДК 517.95 + 556.342.2 + 539.217

Математическая модель поршневого вытеснения жидкости в упругой пористой среде

А.Н. Сибин
АлтГУ, г. Барнаул

Рассматривается движение двухфазной несжимаемой жидкости в неоднородном анизотропном грунте с пористостью ϕ. Пусть имеется прямолинейная цепочка близко расположенных относительно друг друга скважин, нагнетающих в бесконечный пласт с заданными постоянными давлениями p_1^0 жидкость (например воду) с вязкостью μ_1. Горизонтальный пласт ($g=0$) содержит другую жидкость, например нефть с вязкостью μ_2, находящуюся под постоянным давлением p_2^0. Выберем ось x направленной перпендикулярно по отношению к линии скважин и ввиду симметрии процесса рассмотрим полубесконечный интервал $x \in (0,\infty)$. Процесс вытеснения нефти водой описывается поршневой моделью [1]. Пусть жидкости несжимаемы (истинные плотности ρ_1^0 и ρ_2^0 постоянные), капиллярный скачек равен нулю и преобладают упругие свойства среды. Ключевым моментом является переменная пористость грунта. В области $x \in [0, l(t)) = \Omega_1$ концентрация воды $s_1 = 1$, а концентрация нефти $s_2 = 0$. В области $x \in (l, \infty) = \Omega_2$ концентрация воды $s_1 = 0$, а концентрация нефти $s_2 = 1$. Граница раздела воды и нефти $x = l(t)$ определяется в ходе решения задачи. С учетом сделанных предположений в областях Ω_i уравнения сохранения массы и импульса принимает вид [2]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varphi_i}{1-\varphi_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_i(u_i - u_{3i})) = 0, \quad i = 1,2, \tag{1}$$

$$\varphi_i(u_i - u_{3i}) = -K_0 k_{0i}(1-\varphi_i)\frac{\partial p_i}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial(1-\varphi_i)}{\partial t} + (1-\varphi_i)^2 \frac{\partial u_{3i}}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

$$(1-\varphi_i)\frac{\partial u_{3i}}{\partial x} = -a_2(\varphi_i)\frac{\partial p_{ei}}{\partial t}, \tag{4}$$

$$p_{tot} = p_{tot}^0(t), \quad p_1 = p_2,$$

Здесь (x,t) – переменные Лагранжа, $\vec{u}_i$, – скорость i-й фазы, $\vec{u}_3$ –скорость твердого скелета, K_0 – коэффициент фильтрации (функция пористости), ρ_i^0 – истинные плотности фаз, p_e – эффективное давление, p_{tot} – общее давление, p_f, p_s – соответственно давления жидкой и твердой фаз, $\rho_{tot} = (1-\varphi)\rho_3^0 + \varphi(s_1\rho_1^0 + s_2\rho_2^0)$ – общая плотность; $a_2(\varphi)$ – коэффициент объемной сжимаемости горной породы есть заданная функция (модельная зависимость: $a_2(\varphi) = \varphi^b \beta_\varphi$, где $b = 1/2$, β_φ – положительный параметр пороупругой среды, [3]); k_{0i} – относительные фазовые проницаемости, p_i – давления фаз. При этом k_{0i} должны зависеть от насыщенности s_i, поскольку часть порового пространства занята другой жидкостью. По определению, насыщенности s_i меняются в пределах $0 < s_i^0 \le s_i \le 1 - s_j^0 < 1$, $i \ne j$, $s_1 + s_2 = 1$, и при достижении значений $s_i = s_i^0$ движение i-й компоненты прекращается, что обеспечивается выполнением условий $k_{0i}(s_i^0) = 0$, $i = 1,2$.

При заданной пористости уравнения (1), (2) образуют классическую модель Маскета-Леверетта, математическая теория для которой построена в [4]. Имеется ряд задач в которых необходимо учитывать деформацию пористой среды (геодинамика нефтегазовых коллекторов [5], внутренняя суффозия и т.д.). В работах дано обоснование некоторых моделей двухфазных течений в пороупругих средах [6–8]. Исследованию задач суффозии просвещены работы [9, 10].

Из соотношения $p_e = p_{tot}(t) - p_f$. следует

$$p_{ei} = p_{tot}^0(t) - p_i. \tag{5}$$

Здесь нижний индекс i обозначает, что рассматриваемые функции определены в областях $\Omega_i, i = 1,2$. Заметим, что

$$\frac{1}{(1-\varphi)^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varphi}{1-\varphi}\right).$$

С учетом последнего равенства уравнения (3) примают вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varphi_i}{1-\varphi_i}\right) = \frac{\partial u_{3i}}{\partial x}.$$

Используя (3) и (4) получим

$$\frac{1}{1-\varphi_i}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = -a_2(\varphi_i)\frac{\partial p_{ei}}{\partial t},$$

В дальнейшем предполагается, что $a_2(\varphi) = \beta_\varphi \varphi$ и без ограничения общности считаем $\beta_\varphi = 1$. Тогда из последнего равенства получим

$$ln\left|\frac{\varphi_i}{1-\varphi_i}\right| + p_{ei} = lnC_i, \tag{6}$$

где

$$C_i = \frac{\varphi_i^0 e^{p_{tot}^0(0)-p_i^0}}{1-\varphi_i^0}, \quad \varphi_i|_{t=0} = \varphi_i^0, \quad p_i|_{t=0} = p_i^0.$$

Следует отметить, что равенства (6) приводятся к виду

$$\varphi_i = \frac{1}{1+C_i e^{p_{tot}^0(t)-p_i}}.$$

Откуда следует выполнение физического принципа максимума для пористости: $0 \le \varphi_i \le 1$.

Сложив уравнения (3) и (1) получим

$$(1-\varphi_i)u_{3i} + \varphi_i u_i = D_i(t). \tag{7}$$

Используя (1) и (7) получим соотношение

$$u_{3i} = D_i + (1-\varphi_i)K_0 k_{0i}\frac{\partial p_i}{\partial x}. \tag{8}$$

Из (7) используя (8) выразим скорость i-той фазы

$$u_i = D_i - \frac{(1-\varphi_i)^2}{\varphi_i}K_0 k_{0i}\frac{\partial p_i}{\partial x}.$$

Подставив (8) в (3) и используя (5), (6) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varphi_i}{1-\varphi_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varphi_i}K_0(\varphi_i)k_{0i}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right).$$

Пусть коэффициент фильтрации имеет специальный вид: $K_0(\varphi) = K\frac{\varphi}{(1-\varphi)^2}$, где $K = const$ – размерный коэффициент. Тогда предыдущее равенство принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varphi_i}{1-\varphi_i}\right) = \kappa_i \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi_i}{1-\varphi_i}\right)\right). \tag{9}$$

Здесь $\kappa_i = Kk_{0i} = const$. Положим $\phi_i = \frac{\varphi_i}{1-\varphi_i}$ и представим уравнение (9) в виде

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial t} = \kappa_i \frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}. \tag{10}$$

Предполагается, что в начальный момент времени $l(0) = 0$, $\phi_i(x,0) = \phi_i^0 = const$, ($i = 1,2$). На внешних границах областей заданы условия:

$$\phi_1(0,t) = \phi_1^0 = const, \quad \phi_2(\infty,t) = \phi_2^0, \tag{11}$$

которые согласующиеся с начальными данными. На подвижной свободной границе $x = l(t)$ должны быть обеспечены условия непрерывности пористости и расходов (скоростей фильтрации Дарси)

$$\phi_1(l,t) = \phi_2(l,t), \tag{12}$$

$$\kappa_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(l,t) = \kappa_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(l,t), \tag{13}$$

а так же кинематическое условие

$$\frac{dl}{dt} = -\kappa_1 \frac{1+\phi_1}{\phi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(l,t). \tag{14}$$

Введем в каждой из областей Ω_1, Ω_2 автомодельные переменные

$$y_1 = \frac{x}{2\sqrt{\kappa_1 t}}, \quad y_2 = \frac{x}{2\sqrt{\kappa_2 t}}.$$

Будем искать функции $\phi_1(x,t)$, $\phi_2(x,t)$, $x = l(t)$ в виде $\phi_1(y_1)$, $\varphi_1(y_2)$ и $l = c\sqrt{t}$, где c – пока произвольная константа. Легко видеть, что

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{y_i}{2t}\frac{d}{dy_i}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa_i t}}\frac{d}{dy_i}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{4\kappa_i t}\frac{d^2}{dy_i^2}$$

и уравнения (10) примут вид

$$\frac{d^2\phi_i}{dy_i^2} + 2y_i \frac{d\phi_i}{dy_i} = 0, \quad (i = 1,2).$$

Проинтегрировав эти уравнения, получим

$$\phi_i = A_i \mathrm{erf} y_i + B_i,$$

где функция

$$\mathrm{erf} y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-\zeta^2} d\zeta$$

есть интеграл вероятности, причем $\mathrm{erf}(0) = 0$, $\mathrm{erf}(\infty) = 1$. Заметим, что подвижная граница $l = c\sqrt{t}$ в автомодельных переменных y_i переходит в фиксированные границы $y_{1*} = c/(2\sqrt{\kappa_1})$ и $y_{2*} = c/(2\sqrt{\kappa_2})$, а фиксированные граничные точки $x = 0$, $x = \infty$ переходят соответственно в точки $y_1 = 0$, $y_2 = \infty$. Для определения пяти искомых постоянных A_i, B_i (i=1,2) и константы c имеется пять условий: в точках $y_1 = 0$, $y_2 = \infty$ выполнены условия (11), два условия непрерывности (12), (13) и кинематическое условие (14). В результате приходим к следующим соотношениям:

$$B_1 = \phi_1^0, \quad A_2 + B_2 = \phi_2^0,$$

$$c = -\frac{1 + A_1 \mathrm{erf}\left(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_1}}\right) + \phi_1^0}{A_1 \mathrm{erf}\left(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_1}}\right) + \phi_1^0} A_1 \sqrt{\kappa_1} e^{-\frac{c^2}{4\kappa_1}}. \tag{15}$$

$$A_2 = \frac{\phi_2^0 - \phi_1^0}{1 + \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} e^{\frac{c^2(\kappa_2 - \kappa_1)}{4\kappa_1\kappa_2}} \mathrm{erf}\left(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_1}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_2}}\right)}.$$

Заметим, что коэффициенты A_1, A_2 отрицательны и функции φ_i монотонно убывают. Так как $\phi_1^0 > \phi_2^0$, то

$$\phi_1^0 \geq \phi_1(y_1) \geq \phi_1(l) = \phi_2(l) \geq \phi_2(y_2) \geq \phi_2^0.$$

Из предыдущего неравенства получим оценку для пористости

$$0 < m_0 = \frac{\phi_1^0}{1+\phi_1^0} \leq \varphi_i \leq \frac{\phi_2^0}{1+\phi_2^0} = M_0 < 1. \tag{16}$$

Из представления (15) следует, что коэффициент $c > 0$, так как для пористости справедлива оценка (16) и $A_1 < 0$.

Рассмотрим уравнение (15) для нахождения параметра c. Положим

$$F(c) \equiv ce^{\frac{c^2}{4\kappa_1}} + \frac{1 + A_1 \mathrm{erf}\,(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_1}}) + \phi_1^0}{A_1 \mathrm{erf}\,(\frac{c}{2\sqrt{\kappa_1}}) + \phi_1^0} A_1\sqrt{\kappa_1}.$$

Заметим, что при $1 > \phi_1^0 > \phi_2^0 > 0$

$$F(0) = \frac{1+\phi_1^0}{\phi_1^0}(\phi_2^0 - \phi_1^0)\sqrt{\kappa_2} < 0, \quad F(+\infty) = +\infty,$$

т.е. функция $F(c)$ меняет знак. Поэтому на интервале $(0, \infty)$ имеется хотя бы один корень уравнения (15). Таким образом
справедливо следующее утверждение

Теорема. Пусть выполнены следующие условия на начальные данные задачи (9)–(14):

$$l(0) = 0, \quad \phi_i(x,0) = \phi_i^0 = const, \quad i = 1,2,$$

$$\phi_1(0,t) = \phi_1^0 = const, \quad \phi_2(\infty,t) = \phi_2^0,$$

$$0 < \phi_2^0 < \phi_1^0 < 1.$$

Тогда существует хотя бы одно классическое автомодельное решение задачи (9)–(14), которое обладает свойством $0 < m_0 \le \varphi_i \le M_0 < 1$, $i = 1,2$.

Заключение. В работе получено точное автомодельное решение задачи поршневого вытеснения жидкостей в пороупругой среде. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-08-00291.

Библиографический список

1. Веригин Н.Н. О фильтрации растворов и эмульсий в пористой среде // 2–й Всесоюзный съезд по теор. и прикл. мех.: Аннот. докл. – М.: Наука, 1964. – С. 50.
2. Папин А.А., Сибин А.Н. Автомодельное решение задачи поршневого вытеснения жидкостей в пороупругой среде // Известия АлтГУ. – 2016. – № 1 (89). – С. 152–156.
3. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // Geodin. Acta. 1998. Vol. 11.
4. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск, 1983.
5. Fowler A. Mathematical Geoscience. Springer-Verlag. London, 2011.
6. Ахмерова И.Г. Разрешимость краевой задачи для уравнений одномерного движения двухфазной смеси // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика. – 2012. – Т. 5. – № 1. – С. 25–35.
7. Simpson G., Spiegelman M., Weinstein M.I. Degenerate dispersive equations arising in the study of magma dynamics // Nonlinearity. – 2007. – Vol. 20.
8. Шишмарев К.А. Тепломассоперенос в тающем снеге // Труды молодых ученых Алтайского государственного университета. – 2011. – № 8. – С. 126–128.
9. Кузиков С.С., Папин А.А., Сибин А.Н. Численное исследование профильной задачи внутренней эрозии в межмерзлотном водоносном слое // Известия АлтГУ, Барнаул, 2014, Вып. 1/2 (85).
10. Папин А.А., Сибин А.Н. Проблемы математического моделирования внутренней суффозии грунта : препринт №1/15. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2015. – 33 с.

УДК 517.95, 532.546

Аналитическое и численное исследование задачи фильтрации в пороупругой среде

М.А. Токарева, Р.А. Вирц
АлтГУ, г. Барнаул

В работе рассматривается математическая модель фильтрации жидкости в пороупругой среде. В основе математической модели лежит квазилинейная система уравнений составного типа, описывающая нестационарное движение сжимаемой жидкости в пороупругой среде при отсутствии фазовых переходов. Особенностью рассматриваемой в работе модели движения вязкой жидкости в сжимаемой твердой среде является использование закона Дарси вместо уравнения импульса для жидкой фазы, и реологическое соотношение, связывающее дивергенцию скорости твердой фазы и эффективное давление.