9. Голяндина Н.Э. Метод «Гусеница»-SSA: анализ временных рядов: учеб. пособие. – СПб., 2004. – 76 с.
10. Мартко Е.О. Прогнозирование эксплуатационной надежности электродвигателя на основе вероятностной модели его технического состояния в АПК : дис ... канд. техн. наук: 05.20.02. – Защищена 30.06.15: Утв. – Барнаул, 2015. – 129 с.

УДК 519.81

Асимметрия информированности в иерархических системах

Е. В. Матюнин[1], Н. М. Оскорбин[2]
[1]ООО «МЕМ», г. Барнаул; [2]АлтГУ, г. Барнаул

Изучение взаимодействия участников иерархических систем проводилось во многих работах отечественных и зарубежных авторов, например, [1–4], в том числе, в условиях асимметрии информированности относительно случайных параметров системы [5, 6]. Прикладная направленность этих исследований отмечена, например, в [7].

В данной статье иерархическое взаимодействие участников рассматривается в рамках ситуации равновесия по Штакельбергу, в том числе на примере модели контроля [2].

Иерархические игры в условиях асимметрии информированности участников

Исследуется функционирование системы с очередностью ходов. В основе данного взаимодействия рассматривается игра 2-х лиц: $G=\{N, \Theta, X, U, P\}$, где $N=\{1, 2\}$ – множество игроков; $X=\prod_{i\in N} X_i$ – множество допустимых стратегий; $\Theta=\prod_{i\in N}\Theta_i$ – множество всех типов игроков (типы игроков описываются случайными параметрами системы); $U: X\times\Theta\to R$ – множество всех функций выигрышей игроков; $P=\prod_{i\in N} P_i$ – множество функций распределения типов.

Стратегия i-го игрока задается следующим образом: $x_i(\theta^i):\Theta_i\to X_i$, θ^i – вектор случайных параметров, определяющих тип i-го игрока.

В работе рассматривается взаимодействие, где асимметрия информированности задается «знанием» (на момент реализации решения) значений случайных параметров $\theta^1=(\theta_1, \ldots, \theta_h)$, $\theta^1\in\Theta^1$ для первого игрока, $\theta^2=(\theta_{h+1}, \ldots, \theta_r)$, $\theta^2\in\Theta^2$ – для второго игрока. Вектор $\theta\in\Theta$ имеет следующую структуру: $\theta=(\theta_1, \ldots, \theta_h, \theta_{h+1}, \ldots, \theta_r)$, $\Theta=\Theta^1\cup\Theta^2$; I_1, I_2 – множество индексов параметров, значения которых будут известны 1-му игроку и 2-му игроку соответственно ($I_1=\{1,\ldots,h\}$, $I_2=\{h+1,\ldots,r\}$, $I_1\cap I_2=\varnothing$).

Условия асимметрии информированности будем вводить равенством нулю производной от стратегии игрока по параметру, точное значение которого на момент реализации решения не будет известно конкретному участнику [8]: $\dfrac{\partial x_i(\theta^i)}{\partial\theta_j}=0$, $i\in N$, $j\in I\setminus I_i$.

Формализация иерархических взаимодействий с асимметрией информированности проведена по аналогии формализации байесовых игр в работе [9].

Функции ожидаемой полезности участников рассмотрим в общем виде: $U_1=E_{[\theta]}f_1\left(x_1(\cdot), x_2(\cdot), \theta^1, \theta^2\right)$, $U_2=E_{[\theta]}f_2\left(x_1(\cdot), x_1(\cdot), \theta^1, \theta^2\right)$,

где $U_1, U_2\in U$; $E_{[\theta]}$ – операция вычисления математического ожидания.

Принятие решений в задачах с иерархическим взаимодействием сторон в рамках ситуации равновесия по Штакельбергу

Пусть «игроком-лидером» является первый участник, а второй доброжелателен к целям первого, тогда ситуацией равновесия по Штакельбергу называется ситуация $(x_1^S(\cdot),\ x_2^S(\cdot))$, если:

$$x_1^S(\cdot)=\arg\max_{x_1(\cdot)\in\tilde{X}_1}\ \max_{x_2(\cdot)\in R(x_1(\cdot),\theta)}\int_\Theta f_1(x_1(\cdot),x_2(\cdot),\theta)dP(\theta);\ x_2^S(\cdot)\in R(x_1(\cdot),\theta),$$

где $\int\limits_{\Theta} f_1(x_1(\cdot),x_2(\cdot),\theta)d\theta = \int\limits_{\underline{\theta}_1}^{\overline{\theta}_1}...\int\limits_{\underline{\theta}_r}^{\overline{\theta}_r} f_1(x_1(\cdot),x_2(\cdot),\theta^1,\theta^2)p(\theta_1,...,\theta_r)d\theta_r...d\theta_1$, $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$ – стратегии-функции первого и второго участников соответственно, $x_1(\cdot)\in\tilde{X}_1 \subset C^1(\Theta)$, $x_2(\cdot)\in\tilde{X}_2 \subset C^1(\Theta)$, $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$ – пространства стратегий-функций игроков;

$R(x_1^S(\cdot),\theta) \in A\text{rg}\max\limits_{x_2(\cdot)\in\tilde{X}_2} E_{[\theta]} f_2(x_1(\cdot),x_2(\cdot),\theta)$ – множество оптимальных стратегий второго игрока (откликов на различные значения стратегий первого игрока, далее предполагается, что это множество является одноэлементным).

На этапе планирования «игрок-лидер» сообщает оппоненту, что принимает решение первым и выбирает стратегию $x_1(\cdot)$ из множества допустимых решающих функций $\tilde{X}_1(\cdot)$. Первый участник предполагает, что сообщает свою стратегию второму участнику и отыскивает его оптимальный отклик в виде:

$$R(x_1^S(\cdot),\theta) \in A\text{rg}\max_{x_2(\cdot)\in\tilde{X}_2} \int\limits_{\Theta} f_2(x_1(\cdot),x_2(\cdot),\theta)d\theta.$$

Нахождение оптимальной реакции второго игрока на действия первого игрока в условиях асимметрии информированности приводит к решению следующей вариационной задачи:

$$\int\limits_{\underline{\theta}_1}^{\overline{\theta}_1}...\int\limits_{\underline{\theta}_r}^{\overline{\theta}_r} f_2(x_1(\cdot),x_2(\cdot),\theta^1,\theta^2)d\theta_r...d\theta_1 \to \max_{x_2(\cdot)}, \quad \frac{\partial x_2(\theta^2)}{\partial\theta_j}=0, \quad j\in I_1. \quad (1)$$

Функция Лагранжа для задачи (1) имеет вид:

$$\int\limits_{\Theta} \lambda_2 f_2(x_1(\cdot),x_2(\cdot),\theta)p(\theta) + \sum_{j\in I_1}\mu_j(\cdot)\frac{\partial x_2(\theta^2)}{\partial\theta_j}d\theta,$$

где λ_2, $\mu_j(\cdot)$ – множители Лагранжа.

Получаем необходимые условия экстремума в виде:

$$\sum_{j\in I_1}\frac{\partial\mu_j(\cdot)}{\partial\theta_j} = \frac{\partial\big(\lambda_2 f_2(x_1(\cdot),x_2(\cdot),\theta)p(\theta)\big)}{\partial x_2}.$$

Положим, $\lambda_2=1$, условия трансверсальности для свободных границ записываются в виде: $\mu_j(\theta_j)|_{\theta_j\in[\underline{\theta}_j,\overline{\theta}_j]}=0,\ j\in I_1$.

Получаем: $\sum\limits_{j\in I_1}\mu_j(\cdot)|_{\theta_j\in[\underline{\theta}_j,\overline{\theta}_j]} = \int\limits_{\Theta_1}\frac{\partial\big(\lambda_2 f_2(x_1(\cdot),x_2(\cdot),\theta)p(\theta)\big)}{\partial x_2}d\theta^1$.

Необходимые условия оптимальности принимают вид:

$$\int\limits_{\Theta_1}\frac{\partial\big(\lambda_2 f_2(x_1(\cdot),x_2(\cdot),\theta)p(\theta)\big)}{\partial x_2}d\theta^1 = 0. \quad (2)$$

Порядок определения оптимальной стратегии $x_2^S(\cdot)$ с помощью необходимых условий оптимальности (2) зависит от вида функций $f_2(x_1(\cdot),x_2(\cdot),\theta)$ и $p(\theta)$.

Решая уравнение (2), «игрок-лидер» получает оптимальный отклик $x_2^S(\cdot)$ на сообщение оппоненту стратегии $x_1(\cdot)$ и переходит к нахождению собственной оптимальной стратегии, рассматривая вариационную задачу:

$$\int\limits_{\underline{\theta}_1}^{\overline{\theta}_1}...\int\limits_{\underline{\theta}_r}^{\overline{\theta}_r} f_1(x_1(\cdot),x_2^S(\cdot),\theta^1,\theta^2)d\theta_r...d\theta_1 \to \max_{x_1(\cdot)}, \quad \frac{\partial x_1(\theta^1)}{\partial\theta_i}=0, \quad i\in I_2. \quad (3)$$

Функция Лагранжа для задачи (3) имеет вид:

$$\int\limits_{\Theta}\lambda_1 f_1(x_1(\cdot),x_2^S(\cdot),\theta)p(\theta) + \sum_{i\in I_2}\mu_i(\cdot)\frac{\partial x_1(\theta^1)}{\partial\theta_i}d\theta,$$

где λ_1, $\mu_i(\cdot)$ – множители Лагранжа. Получаем необходимые условия экстремума: $\sum\limits_{i\in I_2}\mu_i(\cdot)|_{\theta_i\in[\underline{\theta}_i,\overline{\theta}_i]} = \int\limits_{\Theta_2}\frac{\partial\big(\lambda_1 f_1(x_1(\cdot),x_2^S(\cdot),\theta)p(\theta)\big)}{\partial x_1}d\theta^2$.

Необходимые условия оптимальности имеют вид:

$$\int_{\Theta_2} \frac{\partial\left(\lambda_2 f_2(x_1(\cdot), x_2^S(\cdot), \theta) p(\theta)\right)}{\partial x_1} d\theta^2 = 0. \qquad (4)$$

Таким образом, «игрок-лидер» в процессе планирования решения находит свою оптимальную ожидаемую стратегию $x_1^S(\cdot)$ и стратегию оппонента $x_2^S(\cdot)$ в ходе решения уравнений (2) и (4) соответственно.

Далее участники взаимодействия переходят к реализации решения.

Первый участник на основе расчетов, проведенных при планировании решения, сообщает свою стратегию-функцию $x_1^S(\cdot)$ второму участнику, который выбирает решение $x_2^S(\cdot) \in A\mathrm{rg} \max\limits_{x_2(\cdot)\in \tilde{X}_2} E_{[\theta]} f_2(x_1(\cdot), x_2(\cdot), \theta)$. Первый участник в рамках своей информированности о значении $x_2^S(\cdot)$ выбирает решение $x_1^S(\cdot)$ и реализует его.

Влияние асимметрии информированности на выбор оптимальных стратегий и величину ожидаемых выигрышей участников рассмотрим далее на примере модели контроля [2, 10, 11].

Модель контроля в условиях асимметрии информированности участников

В модели контроля участниками взаимодействия выступают контрольный орган (C) и исполнитель (P). Стратегией игрока P является величина неисполнения $\varepsilon \geq 0$ предлагаемых контрольным органом регламентов. Стратегией игрока C является частота (вероятность) контроля исполнителя $q \in [0, 1]$. В рассматриваемой системе игроки заинтересованы уменьшить свои затраты, в том числе системные, ответственность за которые несет игрок C. Исследуемая модель контроля имеет следующий вид:

$$f_C(q,\varepsilon) = (c \cdot q + m \cdot \varepsilon^2) \to \min_q;$$

$$f_P(q,\varepsilon) = (a \cdot q \cdot \varepsilon + \frac{b}{\varepsilon}) \to \min_\varepsilon.$$

В данной модели: f_C, f_P – целевые функции игроков; a – коэффициент линейной функции штрафа; b – коэффициент функции трудозатрат (b>0); c – коэффициент функции затрат на контроль; m – коэффициент функции системных потерь (m>0).

Для формализации асимметрии информированности в данной модели предположим, что параметры a, c являются независимыми случайными величинами.

В рамках иерархического взаимодействия сторон исследовано влияние изменения структуры информированности на выбор стратегий участников. Далее рассмотрим 3 варианта информированности участников.

1. Двусторонняя асимметрия информированности сторон о существенных параметрах друг друга.

2. Односторонняя асимметрия информированности контрольного органа относительно существенных параметров исполнителя.

3. Неполная, но совпадающая информированность игроков.

Вариант информированности 1

Контрольный орган на момент реализации решения будет информирован о значении параметра c, но не будет информирован о точном значении, которое примет параметр a. Исполнитель на момент реализации решения будет иметь точную информацию и о параметре a, и о параметре c. И контрольный орган и исполнитель информированы о том, узнает ли оппонент точные значения каких-либо параметров на момент принятия решения.

Контрольный орган планирует решение, рассматривая оптимизационную задачу исполнителя:

$$\int_{\underline{c}}^{\overline{c}} \int_{\underline{a}}^{\overline{a}} \left(a \cdot q(c)\varepsilon(a,c) + \frac{b}{\varepsilon(a,c)} \right) dP(a) dP(c) \to \min_{\varepsilon(a,c)}.$$

Оптимальная стратегия исполнителя имеет вид:

$$\varepsilon^S(a,c) = \sqrt{\frac{b}{a \cdot q(c)}}.$$

Контрольный орган решает оптимизационную задачу:

$$\int\limits_{\underline{c}}^{\overline{c}}\int\limits_{\underline{a}}^{\overline{a}}(c\cdot q(c)+m\cdot\varepsilon^S(a,c)^2)dP(a)dP(c)\to\min_{q(c)},\ \frac{\partial q}{\partial a}=0.$$

Равновесные стратегии-функции контрольного органа и исполнителя имеют вид:

$$q^S(c)=\sqrt{\frac{m\cdot b}{c}\int\limits_{\underline{a}}^{\overline{a}}\frac{p(a)}{a}da}\,,\ \varepsilon^S(a,c)=\sqrt{b/a\cdot\sqrt{\frac{m\cdot b}{c}\int\limits_{\underline{a}}^{\overline{a}}\frac{p(a)}{a}da}}\,.$$

Вариант информированности 2

Контрольный орган и исполнитель на момент реализации решения не будут информированы о точных значениях коэффициента линейной функции штрафа и коэффициента функции затрат на контроль.

Контрольный орган планирует решение, рассматривая оптимизационную задачу исполнителя:

$$q\cdot\varepsilon\cdot\int\limits_{\underline{a}}^{\overline{a}}adP(a)+\frac{b}{\varepsilon}\to\min_{\varepsilon}.$$

Оптимальная стратегия исполнителя имеет вид:

$$\varepsilon^S=\sqrt{b/q\cdot\int\limits_{\underline{a}}^{\overline{a}}a\cdot p(a)da}\,.$$

Контрольный орган решает оптимизационную задачу:

$$\int\limits_{\underline{c}}^{\overline{c}}\left(c\cdot q+m\cdot\left(\varepsilon^S\right)^2\right)dP(c)\to\min_{q}.$$

Оптимальная стратегия контрольного органа и исполнителя имеют вид:

$$q^S=\sqrt{\frac{m\cdot b}{c}\int\limits_{\underline{a}}^{\overline{a}}\frac{p(a)}{a}da}\,;\ \varepsilon^S=\sqrt{b/q^S\cdot\int\limits_{\underline{a}}^{\overline{a}}a\cdot p(a)da}\,.$$

Вариант информированности 3

Контрольный орган на момент реализации решения будет информирован о точных значениях коэффициента линейной функции штрафа и не будет информирован о точном значении коэффициента функции затрат на контроль. Исполнитель на момент реализации решения не будет информирован о точном значении коэффициента линейной функции штрафа и не будет информирован о точном значении коэффициента функции затрат на контроль.

Контрольный орган планирует решение, рассматривая оптимизационную задачу исполнителя:

$$\int\limits_{\underline{c}}^{\overline{c}}\int\limits_{\underline{a}}^{\overline{a}}\left(a\cdot q\cdot\varepsilon(a)+\frac{b}{\varepsilon(a)}\right)dP(a)dP(c)\to\min_{\varepsilon(a)},\ \frac{\partial\varepsilon}{\partial c}=0.$$

Оптимальная стратегия исполнителя имеет вид: $\varepsilon^S(a)=\sqrt{b/a\cdot q\cdot\int\limits_{\underline{c}}^{\overline{c}}p(c)dc}\,.$

Контрольный орган решает задачу: $\int\limits_{\underline{c}}^{\overline{c}}\int\limits_{\underline{a}}^{\overline{a}}(c\cdot q+m\cdot\varepsilon^S(a)^2)dP(a)dP(c)\to\min\limits_{q}.$

Оптимальные стратегии контрольного органа и исполнителя имеют вид: $q^S=\sqrt{m\cdot b/\int\limits_{\underline{a}}^{\overline{a}}a\cdot p(a)da\cdot\int\limits_{\underline{c}}^{\overline{c}}c\cdot p(c)dc}\,,$

$\varepsilon^S(a)=\sqrt{\frac{b}{a\cdot q^S}}\,.$

Таким образом, найдены оптимальные стратегии участников для предложенных вариантов информированности в рамках ситуации равновесия по Штакельбергу.

Предположим, в данной модели: $a\in[50, 150]$, $c\in[1/2, 3/2]$, b=1, m=7, $p(a)=\frac{1}{\overline{a}-\underline{a}}$, $p(c)=\frac{1}{\overline{c}-\underline{c}}$ [10]. В таблице представлены стратегии и значения функций ожидаемых потерь контрольного органа и исполнителя для различных вариантов информированности.

Таблица – Оптимальные стратегии и ожидаемые потери игрока C и игрока P для вариантов информированности

Вариант информированности	Стратегия игрока C	Стратегия игрока P	Ожидаемые затраты игрока C	Ожидаемые затраты игрока P
1	$\frac{0,2773}{\sqrt{c}}$	$1,8990\sqrt{\frac{\sqrt{c}}{a}}$	0,5485	10,5667
2	$0,2646$	0,1944	0,5291	10,2876
3	$0,2775$	$\sqrt{\frac{1}{a\cdot 0,2775}}$	0,5546	10,4202

Заключение

Данные таблицы 1 показывают, что каждый участник заинтересован либо в реализации ситуации, где только он получит дополнительную информацию, либо в реализации той ситуации, в которой ни он, ни оппонент не получит дополнительной информации.

Кроме того, по результатам расчета выявлен парадоксальный случай, в котором оба участника, не получая дополнительной информации, имеют более высокие выигрыши по сравнению с ситуацией, в которой оба участника будут информированы о значениях существенных параметров системы. Анализ этого случая на модели контроля показывает, что одному из игроков при выборе решения не следует учитывать эту дополнительную информацию. Такие случаи известны на практике, поэтому предлагается использовать термин «умный игрок» в том случае если он знает значение параметра, но не воспользуется информированностью, если она принесет ему убыток, в противном случае рекомендуется использовать термин «информированный игрок».

Полученные результаты можно использовать при анализе и проектировании оптимальных механизмов функционирования иерархических систем. В том случае, если управляющий системой субъект может контролировать доступность информации для одной и другой стороны, то возможно регулирование рассмотренного взаимодействия с целью повышения эффективности механизма функционирования системы в целом.

Таким образом, принцип проектирования оптимальных экономических механизмов с помощью введения асимметрии информированности участников является важным инструментом анализа информационного взаимодействия в социальных и экономических системах.

Библиографический список

1. Бурков В.Н., Коргин Н.А., Новиков Д.А. Введение в теорию управления организационными системами. – М.: Либроком, 2009. – 264 с.
2. Мамченко О.П., Оскорбин Н.. Моделирование иерархических систем: учебник для вузов. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2007. – 317 с.
3. Tirole J. The theory of industrial organization. – MA.: MIT Press, 1988. – 479 p.
4. Wu H., Parlar M. Games with incomplete information: A simplified exposition with inventory management applications // International journal of production economics. – 2011. – Volume 133. Issue 2. – P. 562–577.
5. Жариков А. В. Модели стимулирования агентов промышленной корпорации в условиях асимметрии информированности // Известия Алтайского государственного университета. – 2010. – №1. – С. 110–113.
6. Myerson R.B. Probability Models for Economic Decisions. – CA.: Duxbury Press, 2005. – 354 p.
7. Hurwicz L., Reiter S. Designing Economic Mechanisms. Cambridge: Cambridge University Press. 2006. – 341 p.
8. Максимов А.В., Оскорбин Н.М. Многопользовательские информационные системы: основы теории и методы исследования: монография. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2005. – 250 с.
9. Алгазин Г. И., Матюнин Е. В. Об оптимальных стратегиях асимметрично информированных участников игровых взаимодействий // Управление большими системами: сборник трудов. – Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН. – М., 2015. – №58. – С. 6–39.
10. Dubina I.N., Oskorbin N.M. Game-theoretic models of incentive and control strategies in social and economic systems // Cybernetics and Systems: An International Journal, 2015. – Vol 46, Iss 5. – P. 303–319.
11. Жариков А.В., Максимов А.В. О решении частной задачи управления в случае разной информированности субъектов // Известия Алтайского государственного университета. – 2006. – № 1. – С. 55–58.