УДК 512.57

О доминионах 3-ступенно нильпотентных групп

А.И. Будкин
АлтГУ, г. Барнаул

Квазимногообразие групп – это класс групп, определимый специальными формулами, называемыми квазитождествами.

Пусть M – произвольный класс групп. Для любой группы G из M и её подгруппы H доминионом $\mathrm{dom}_G^M(H)$ подгруппы H в группе G относительно класса M (либо в M) называется множество всех элементов из G, образы которых равны для каждой пары гомоморфизмов группы G в любую группу из M, совпадающих на H. Несложно заметить, что $\mathrm{dom}_G^M(-)$ является оператором замыкания на решетке подгрупп данной группы G, в том смысле, что он экстенсивный (доминион подгруппы H содержит H), идемпотентный (доминион доминиона подгруппы H равен доминиону H) и изотонный (если H – подгруппа группы B, то доминион H содержится в доминионе подгруппы B). Возникает понятие замкнутой подгруппы H в группе G (относительно класса M). Представляется интересным и естественным исследование замкнутых подгрупп. Существует тесная связь между понятием доминиона и амальгамами. Целесообразность изучения доминионов в квазимногообразиях обосновывается в [1] тем, что, согласно [2], только квазимногообразия среди аксиоматизируемых классов обладает полной теорией определяющих соотношений, позволяющей определить свободное произведение с объединенной подгруппой.

Пусть H – подгруппа группы G, C – свободное произведение в данном квазимногообразии M группы G на G с объединенной подгруппой H. Группа H называется замкнутой в G (относительно M), если пересечение свободных сомножителей группы C совпадает с H. Группа H называется абсолютно замкнутой в классе M, если она замкнута в каждой группе из M, содержащей H. Группа H называется n-замкнутой в классе M, если она замкнута в каждой группе G из M, порожденной по модулю H n элементами.

Отметим, что доминионы подробно изучены в квазимногообразиях абелевых групп [3–6].

Исследованию доминионов в классе нильпотентных групп также посвящен цикл статей. Выделим из них [7, 8]. В последнее время целенаправленно ведется изучение доминионов метабелевых групп [9–14]. Доминионы универсальных алгебр исследовались в [15, 16].

В данной работе исследуются доминионы аддитивной группы Q рациональных чисел в группах из нильпотентных квазимногообразий ступени не выше трех.

Как обычно, через gr(S) обозначаем группу, порожденную множеством S. N3 – это класс нильпотентных групп ступени не более трех.

У нас A – группа, имеющая в классе N3 следующее представление:

A=gr(x, y || [y,x,y]=1).

F – свободная в N3 группа ранга 2.

Ранее автором было доказано, что если M – произвольное квазимногообразие нильпотентных групп без кручения ступени не выше трех, не содержащее группу A, F из M, Q – аддитивная группа рациональных чисел, тогда группа Q 2-замкнута в M. В данной работе анонсирован следующий результат.

Теорема. Пусть G – 3-ступенно нильпотентная группа без кручения, M – любое квазимногообразие групп, G = gr(A,Q), G из M и пересечение A и Q равно gr([x_2,x_1,x_1]). Тогда dom $_{G}^{M}$ (Q) = Q.

Библиографический список

1. Budkin A.I. Dominions in Quasivarieties of Universal Algebras // Studia Logica. – 2004. – V. 78, №1/2. – P. 107–127.

2. Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970.

3. Шахова С.А. О решетках доминионов в квазимногообразиях абелевых групп // Алгебра и логика. – 2005. – Т. 44, №2. – С. 238–251.

4. Шахова С.А. Условия дистрибутивности решёток доминионов в квазимногообразиях абелевых групп // Алгебра и логика. – 2006. – Т. 45, №4. – С. 484–499.

5. Шахова С.А. Об одном свойстве операции пересечения в решетках доминионов квазимногообразий абелевых групп // Известия АлтГУ. – 2010. – Т. 65, №1. – С. 41–43.

6. Шахова С.А. О существовании решетки доминионов в квазимногообразиях абелевых групп // Известия АлтГУ. – 2011. – Т. 69, №1. – С. 31–33.

7. Magidin A. Dominions in varieties of nilpotent groups // Comm. Algebra. – 2000. – V. 28. – P. 1241–1270.

8. Шахова С.А. Абсолютно замкнутые группы в классе 2-ступенно нильпотентных групп без кручения // Матеем. заметки. – 2015. – Т. 97, №6. – С. 15–18.

9. Будкин А.И. О доминионах в квазимногообразиях метабелевых групп // Сиб. матем. ж. – 2010. – Т. 51, №3. – С. 498–505.

10. Будкин А.И. О доминионе полной подгруппы метабелевой группы // Известия АлтГУ. – 2010. – Т. 65, №2. – С. 15–19.
11. Будкин А.И. О доминионах абелевых подгрупп метабелевых групп // Алгебра и логика. – 2012. – Т. 51, №5. – С. 608–622.
12. Будкин А.И. Об абсолютной замкнутости абелевых групп без кручения в классе метабелевых групп // Алгебра и логика. – 2014. – Т. 53, №1. – С. 15–25.
13. Будкин А.И. О замкнутости локально циклической подгруппы в метабелевой группе // Сиб. матем. ж. – 2014. – Т. 55, №6. – С. 1250–1278.
14. Будкин А.И. О доминионах разрешимых групп // Алгебра и логика. – 2015. – Т. 54, №5. – С. 575–588.
15. Будкин А.И. О доминионах конечных групп // Известия АлтГУ. – 2011. – Т. 69, №2. – С. 15–18.
16. Будкин А.И. Доминионы универсальных алгебр и проективные свойства // Алгебра и логика. – 2008. – Т. 47, №5. – С. 541–557.

УДК 512.545

Аппроксимация разрешимых монотонно упорядоченных групп с плетениями m-групп

С.В. Вараксин
АлтГУ, Барнаул

Напомним, решеточно упорядоченной группой (l-группой) G называется алгебраическая группа с определенными на ней решеточными операциями объединения $\vee$ и пересечения $\wedge$, устойчивыми относительно групповых операций [1]:

$a(u\wedge v)c=auc\wedge avc$ и $a(u\vee v)c=auc\vee avc$,

а монотонно упорядоченной группой (m-группой) (G,φ) называется l-группа G с определенной на ней одноместной операцией φ, которая является автоморфизмом второго порядка группы G и антиавтоморфизмом решетки G:

$\varphi(xy)= \varphi(x)\varphi(y)$, $\varphi(\varphi(x))=x$,

$\varphi(x\vee y)= \varphi(x)\wedge\varphi(y)$, $\varphi(x\vee y)= \varphi(x)\vee\varphi(y)$.

Следуя установившимся определениям, разрешимой m-группой ступени n назовем m-группу, обладающую субнормальным рядом выпуклых m-подгрупп с абелевыми факторами.

Аналогично сплетению решеточно упорядоченных групп Зенковым А.В. [2] определено сплетение m-группы (A,φ) и m-группы подстановок (B,Ω,φ). Известно, что разрешимая транзитивная l-группа подста-