где $k, k_1, k_2, k_3, u_i, v_i, w_i, m$ – неотрицательные целые числа, p_i – простые целые числа, $p_i \neq 2$, $n^{\frac{p_i-1}{2}} \equiv -1(\operatorname{mod} p_i)$, $a_i^2 - b_i^2 n = q_i$ – простые целые числа, $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $q_i \neq 2$, $n^{\frac{q_i-1}{2}} \equiv -1(\operatorname{mod} q_i)$.

Библиографический список

1. Журавлев Е.В., Токарев В.Н. Кольца целых чисел квадратичных полей // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. – Барнаул. Изд-во АлтГУ, 2016. – С. 48–71.

УДК 512.552.4

Обобщение гипотезы Мохаррама Хана

А.В. Кислицин, Ю.А. Павлюк
АлтГПУ, г. Барнаул

На протяжении работы R обозначает ассоциативное кольцо с единицей, $Z(R)$ – его центр.

Основываясь на результатах Джекобсона, Херстейна, МакХэйла, Томинаги [1], Мохаррам Хан выдвинул гипотезу: пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, f и g – автоморфизмы R, $n > 1$ – фиксированное целое; если $f(x^{n+1}) \pm g(x^n) \in Z(R)$ для всех $x \in R$, то R коммутативно [1].

В работе [1] удалось получить положительный ответ на эту гипотезу при $n = 2, 3, 4$ и при ограничениях на f и g. В работе [3] получен положительный ответ на гипотезу Хана при $n = 7, 8$, а также при ограничениях на кручение кольца.

Таким образом гипотеза М. Хана справедлива при $n = 2, 3, 4, 7, 8$, а также для колец без 2-кручения при $n = 1, 5, 6$ [1, 2]. Дальнейшие исследования показали справедливость утверждения более сильного, чем выдвинутая гипотеза. А именно, имеет место следующее утверждение [3].

Теорема 1. Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, α и β – автоморфизмы R и найдётся целое $n > 1$ такое, что для всех $x \in R$ выполняется $\alpha(x^{n+1}) \pm \beta(x^n) \in Z(R)$. Тогда $2x \in Z(R)$. В частности, если кольцо R без 2-кручения, то оно коммутативно.

В настоящей работе условие гипотезы М. Хана обобщается до следующего: $\alpha(x^{n+2}) + \beta(x^{n+1}) + \gamma(x^n) \in Z(R)$ для всех $x \in R$, фиксированного целого $n > 1$ и некоторых автоморфизмов α, β и γ кольца R.

Исследование коммутативности колец с данным условием при $n = 2, 3, 4$ привело к следующим результатам.

Теорема 2. Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, α, β и γ – автоморфизмы R. Если $\alpha(x^4) + \beta(x^3) + \gamma(x^2) \in Z(R)$ для всех $x \in R$, то $6x \in Z(R)$. В частности, если кольцо R без 2-кручения и без 3-кручения, то оно коммутативно.

Теорема 3. Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, α, β и γ – автоморфизмы R. Если $\alpha(x^5) + \beta(x^4) + \gamma(x^3) \in Z(R)$ для всех $x \in R$, то $24x \in Z(R)$. В частности, если кольцо R без 2-кручения и без 3-кручения, то оно коммутативно.

Теорема 4. Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, α, β и γ – автоморфизмы R. Если $\alpha(x^6) + \beta(x^5) + \gamma(x^4) \in Z(R)$ для всех $x \in R$, то $96x \in Z(R)$. В частности, если кольцо R без 2-кручения и без 3-кручения, то оно коммутативно.

На основании проведенных исследований была сформулирована следующая гипотеза.

Гипотеза. Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, α, β и γ – автоморфизмы R и найдётся целое n>1 такое, что для всех $x \in R$ выполняется $\alpha(x^{n+2}) + \beta(x^{n+1}) + \gamma(x^n) \in Z(R)$. Тогда $2^k 3^m x \in Z(R)$ для некоторых целых положительных k и m. В частности, если кольцо R без 2-кручения и без 3-кручения, то оно коммутативно.

Из теорем 2–4 следует справедливость выдвинутой гипотезы при $n = 2, 3, 4$. В общем же виде истинность данной гипотезы не доказана.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10002).

Библиографический список

1. Khan M.A. Commutativity of rings with constraints on pair of automorphisms // Advances in Theoretical and Appleid Mathematics. – 2006. – №2, v. 1. – С. 119–126.

2. Кислицин А.В. О гипотезе Мохарамма Хана // МАК-2008 : материалы одиннадцатой региональной конференции по математике. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2008. – С. 11–12.

3. Кислицин А.В., Мальцев Ю.Н. О коммутативности ассоциативных колец, удовлетворяющих тождествам // Известия Алтайского государственного университета. – 2009. – №1(61). – С. 50–53.