УДК 512.552.18

Тождества матричного кольца над кольцом Галуа

А.Н. Федорова
Алтайский государственный университет, г. Барнаул

Пусть $A_p^{(m,n)} = var\ M_2\big(GR(p^m, n)\big)$ – многообразие колец, порожденное матричным кольцом второго порядка над кольцом Галуа, и $N_p^{(m,n)}$ – многообразие, состоящее из всех нильпотентных колец многообразия $A_p^{(m,n)}$. Обозначим через B_t подмножество свободного кольца $Z_{p^m}[x_1, \dots, x_t]$, состоящее из элементов вида $x_{\alpha(1)} \dots x_{\alpha(t)} - x_{\beta(1)} \dots x_{\beta(t)}$ $(\alpha, \beta \in S_t)$ таких, что $\{\alpha(i) | 1 \le i \le t, i \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\} = \{\beta(i) | 1 \le i \le t, i \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\}$. Через $L_{Z_{p^m}}(S)$ обозначим линейную оболочку множества S, являющегося подмножеством в $Z_{p^m}[x_1, \dots, x_t]$.

Доказаны две теоремы:

Теорема 1. B_{2m-1} лежит в идеале тождеств $T(N_p^{(m,n)})$.

Теорема 2. Пусть полилинейный многочлен $f(x_1, \dots, x_t) \in T(N_p^{(m,n)})$

$(3 \le t \le 2m-1)$. Тогда $f \in L_{Z_{p^m}}(B_t) + p\, L_{Z_{p^m}}(x_{\delta(1)} \dots x_{\delta(t)} | \delta \in S_t)$.

Библиографический список

1. Олексенко А.Н. Базис тождеств алгебры матриц второго порядка над Z_{p^2} // Фундаментальная и прикладная математика. – 2000. Т.6, №2. – С. 1–31.

УДК 512.54.01

О конечной аксиоматизируемости класса Леви квазимногообразия, порождённого конечной группой

С.А. Шахова
Алтайский государственный университет, г. Барнаул

Для произвольного класса групп M обозначим через $L(M)$ класс всех групп G, в которых нормальное замыкание $(a)^G$ каждого элемента $a \in G$ принадлежит квазимногообразию M. Класс $L(M)$ называется классом Леви, порождённым классом групп M. Это понятие, возникнув в работе Л.К. Каппе [1] под влиянием работы Ф. Леви [2], в которой исследовались группы G с абелевыми нормальными замыканиями вида $(a)^G$, послужило основой целого направления исследований в теории групп.

А.И. Будкин установил в [3], что если M – квазимногообразие, то $L(M)$ – также является квазимногообразием. Изучению классов Леви квазимногообразий нильпотентных групп посвящены работы [4–9]. В работе [9] возникли классы Леви квазимногообразий, порождённых конечными группами, заданные бесконечными системами квазитождеств.

Совокупность квазитождеств, задающих квазимногообразие, называется базисом этого квазимногообразия. Говорят, что квазимногообразие имеет конечный (бесконечный) аксиоматический ранг, если его можно (нельзя) задать базисом от конечного числа переменных. Квазимногообразие называется конечно аксиоматизируемым (конечно базируемым), если для него существует конечный базис. Из данных определений сразу вытекает, что бесконечность аксиоматического ранга квазимногообразия влечёт отсутствие у этого квазимногообразия конечного базиса.

В Коуровской тетради [10] А.И. Будкин поставил вопрос 15.36: верно ли, что класс Леви $L(M)$ конечно аксиоматизируем, если M – квазимногообразие, порождённое конечной группой?

В данной работе получен отрицательный ответ на этот вопрос. В работе найдена конечная группа G, для которой класс Леви $L(qG)$ имеет бесконечный аксиоматический ранг.

Введём следующие обозначения.

N_2 – многообразие нильпотентных ступени ≤ 2 групп, которое задаётся тождеством $(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x,y,z]=1)$.

p – простое число, $p \neq 2$.

L^p – многообразие, заданное в N_2 тождеством $(\forall x)(x^p=1)$.

F_2 – свободная в многообразии L^p группа ранга 2.

Z_2 – циклическая группа порядка 2.

G – прямое сплетение группы F_2 с группой Z_2.

Доказана следующая теорема.

Теорема. Класс Леви $L(qG)$ имеет бесконечный аксиоматический ранг.

Библиографический список

1. Kappe L.C. On Levi-formation // Arch. Math. – 1972. – V. 23. – P. 561–572.

2. Levi F.W. Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic conditions // J. Indian Math. Soc. – 1942. – №6. – P. 87–97.

3. Будкин А.И. Квазимногообразия Леви // Сибирский математический журнал. – 1999. – Т. 40. – № 2. – С. 266–270.

4. Будкин А.И. О классах Леви, порождённых нильпотентными группами // Алгебра и логика. – 2000. – Т. 39, №6. – С. 635–647.

5. Будкин А.И., Таранина Л.В. О квазимногообразиях Леви, порождённых нильпотентными группами // Сибирский математический журнал. – 2000. – Т. 41, №2. – С. 270–277.

6. Лодейщикова В.В. Об одном квазимногообразии Леви экспоненты 8 // Известия Алтайского государственного университета. – 2010. – Т. 65, №1/2. – С. 42–45.

7. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви, порождённых нильпотентными группами // Известия Алтайского государственного университета. – 2009. – Т. 61, №1. – С. 26–29.

8. Лодейщикова В.В. О классах Леви, порождённых нильпотентными группами // Сибирский математический журнал. – 2010. – Т. 51, №6. – С. 1359–1366.

9. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви экспоненты p^s // Алгебра и логика. – 2011. – Т. 50, №1. – С. 26–41.

10. Коуровская тетрадь (нерешённые проблемы теории групп). – Новосибирск: ИМ СО РАН, 1990.