УДК 514.765

О (псевдо)римановых многообразиях с ограничениями на компоненты разложения тензора кривизны Римана

П.Н. Клепиков, Д.Н. Оскорбин, Е.Д. Родионов
АлтГУ, г. Барнаул

Одной из важных проблем римановой геометрии является задача об установлении связей между кривизной и топологией (псевдо)риманова многообразия. В общем случае задача исследования (псевдо)римановых многообразий с ограничениями на кривизну различного типа представляется достаточно сложной. Поэтому естественно рассматривать данную задачу в более узком классе (псевдо)римановых многообразий, например, в классе (псевдо)римановых многообразий с ограничениями на компоненты разложения Кулкарни – Номидзу тензора кривизны Римана [1]:

$$R = A☺g + W,$$

где R – тензор кривизны Римана, A – тензор одномерной кривизны (бесследовая часть тензора Риччи ricc), g – метрический тензор, W – тензор Вейля, а ☺– произведение Кулкарни-Номидзу.

В случае, если мы будем предполагать наличие ограничений на компоненты разложения Кулкарни – Номидзу, т.е. на тензор одномерной кривизны, тензор Риччи, метрический тензор, или тензор Вейля, мы получим хорошо известные классы многообразий. Так, например, предполагая, что тензор Риччи пропорционален метрическому тензору, или является тензором Киллинга, или тензором Кодацци, мы приходим к понятиям метрик Эйнштейна, или эйнштейново-подобных метрик по А.Грею [1]. Если же мы будем предполагать тензор Вейля тривиальным, или гармоническим, то придем к понятию конформно плоских, или конформно гармонических метрик [1].

Заметим, что в класс (псевдо)римановых многообразий с гармоническим тензором Вейля входят конформно плоские многообразия, многообразия с параллельным тензором Вейля, многообразия Эйнштейна и их прямые произведения, локально симметрические, Риччи параллельные и ряд других многообразий [1]. Поэтому изучение таких многообразий представляет интерес в понимании геометрического и топологического строения (псевдо)риманова многообразия, а также представляется важным с позиций современной теоретической физики. Ранее различные подклассы класса (псевдо)римановых многообразий с гармоническим тензором Вейля изучались в работах многих математиков [2–7].

Другой задачей, тесно примыкающей к проблеме исследования (псевдо)римановых многообразий с гармоническим тензором Вейля является задача изучения солитонов Риччи на таких многообразиях. Уравнение солитона Риччи является естественным обобщением уравнения Эйнштейна и связано с решениями уравнения потока Риччи. Данное название впервые было предложено Р. Гамильтоном в работе [8]. В дальнейшем солитоны Риччи исследовались в работах многих математиков [9–15] и ряде других работ.

Уравнение солитона Риччи на (псевдо)римановом многообразии имеет вид:

$$ricc_g = \lambda \cdot g + L_X g$$

где $ricc_g$ – тензор Риччи, λ – действительная константа, g – метрический тензор, $L_X g$ – производная Ли метрического тензора вдоль полного дифференцируемого векторного поля X.

В общем случае задача исследования и классификации солитонов Риччи на многообразиях является довольно сложной. Поэтому предполагаются ограничения либо на строение многообразия, либо на класс рассматриваемых метрик, либо на размерность многообразия, либо на класс векторных полей, участвующих в записи уравнения солитона Риччи [9–15]. Одним из естественных ограничений является предположение, что рассматриваемое многообразие является однородным пространством и, в частности, группой Ли. В этом направлении известен ряд результатов. Так, например, на группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой, размерности не более четырех, не существует нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи [14]. Аналогичный факт известен для унимодулярных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой любой конечной размерности [15]. Вопрос о существовании нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи на метрических группах Ли размерности более четырех до сих пор остается открытым.

Также нерешенными являются следующие задачи, которые исследовались авторами, и были частично решены [16–20].

– Исследовать псевдоримановы многообразия с гармоническим тензором Вейля, изотропным тензором Вейля.

– Изучить однородные (псевдо)римановы многообразия с гармоническим тензором Вейля, получить их классификацию в размерности 5 и выше.

– Исследовать однородные солитоны Риччи на метрических группах Ли с гармоническим тензором Вейля.

– Изучить солитоны Риччи на k-симметрических псевдоримановых многообразиях. Получить классификацию солитонов Риччи в случае плоских гравитационных волн для многообразий малой размерности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты: № 16–01–00336_а, № 16–31–00048мол_а).

Библиографический список

1. Бессе А. Многообразия Эйнштейна: в 2 т.; пер. с англ. – М.: Мир, 1990.

2. Galaev A.S. Conformally flat Lorentzian manifolds with special holonomy groups // Sbornik: Mathematics, 204 (9), 29–50 (2013).

3. Derdzinski A., Roter W. The local structure of conformally symmetric manifolds // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 16 (2009), no. 1, 117–128.

4. Гладунова (Хромова) О.П., Славский В.В. Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных унимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля // ДАН. – 2010. – Т. 431, №6. – С. 736–768.

5. Воронов Д.С., Родионов Е.Д. Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных неунимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля // ДАН. – 2010. – Т. 432, №3. – С. 301–303.

6. Calvaruso G., Zaeim A. Conformally flat homogeneous pseudo-Riemannian four-manifolds // Tokohu Math. J. – 2014. – V.66. – P. 31–54.

7. Zaeim A., Haji-Badali A. Einstein-like Pseudo-Riemannian Homogeneous Manifolds of Dimension Four // Mediterr. J. Math. – 2016. – P.1–14.

8. Hamilton R.S. The Ricci flow on surfaces // Contemporary Mathematics. – 1988. – V. 71. – P. 237–261.

9. Jablonski M. Homogeneous Ricci solitons are algebraic // Geometry & Topology. – 2014. – V. 8-4. – P. 2477–2486.

10. Cao H.-D. Recent progress on Ricci solitons // Adv. Lectures in Math. – 2010. – V. 11. – P. 1–38.

11. W.Batat and K.Onda, Ricci and Yamabe solitons on second-order symmetric, and plane wave 4-dimensional Lorentzian manifolds // J. Geom. 105 (2014), p. 561–575.

12. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Конформно плоские солитоны Риччи на группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой // Известия АлтГУ. – 2016. – №1(89). – P. 123–128.

13. Brozos Vázquez M., Garcia Rio E., Gavino Fernández S. Locally conformally flat Lorentzian gradient Ricci solitons // Journal of Geometric Analysis. – 013. – V. 23, №3. – P. 1196–1212.

14. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Однородные инвариантные солитоны Риччи на четырехмерных группах Ли // Известия Алтайского государственного университета. – 2015. – №1/2. – С. 115–122.

15. Cerbo L.F. Generic properties of homogeneous Ricci solitons // Adv. Geom. – 2014. – Vol. 14(2). – P. 225–237.

16. Rodionov E.D., Simply connected compact five-dimensional homogeneous Einstein manifolds// Siberian Mathematical Journal. – 1994. – Vol. 35. – P. 163.

17. Nikonorov Y.G., Rodionov E.D., Standard homogeneous Einstein manifolds and Diophantine equations // Archiv der Mathematik. – 1996. – Vol. 32. – P. 123.

18. Rodionov E.D. Standard homogeneous Einstein manifolds // Доклады Академии наук. – 1993. – Т. 328. – № 2. – С. 147.

19. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д. Алгебраические солитоны Риччи на метрических группах Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля // ДАН. – 2017. – Т. 472, № 5. – С. 506–508.

20. Клепиков П.Н. Левоинвариантные псевдоримановы метрики на четырехмерных группах Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля // Известия вузов. Математика. – 2017. – №8. – С. 92–97.

УДК 512.81

Об алгебраических солитонах Риччи на псевдоримановых эйнштейново-подобных метрических группах Ли

П.Н. Клепиков, Е.Д. Родионов
АлтГУ, г. Барнаул

В последнее время активно изучаются различные обобщения многообразий Эйнштейна, например, эйнштейново-подобные (псевдо)римановы многообразия в смысле А. Грея [1], а также солитоны Риччи, впервые рассмотренные Р. Гамильтоном [2].

(Псевдо)риманово многообразие (M, g) называется *солитоном Риччи*, если метрика g удовлетворяет уравнению:

$$r = \Lambda \cdot g + L_X g \ ,$$