4. Batat W., Onda K. Four-Dimensional Pseudo-Riemannian Generalized Symmetric Spaces Which are Algebraic Ricci Solitons // Results. Math. – 2013. – V. 64, №3. – P. 253–267.

5. Calvaruso G., Fino A. Four-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous Ricci solitons // Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. – 2015. – V. 12, No 5.

6. Cerbo L.F. Generic properties of homogeneous Ricci solitons // Adv. Geom. – 2014. – V. 14(2). – P. 225–237.

7. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. Об однородных инвариантных солитонах Риччи на четырехмерных группах Ли // «МАК-2015: Математики – Алтайскому краю», сборник трудов всероссийской конференции по математике. Изд-во: Алт. гос. ун-т., Барнаул. – 2015. – С. 21–24.

8. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Однородные инвариантные солитоны Риччи на четырехмерных группах Ли // Известия Алтайского гос. ун-та. – 2015. – №1/2. – С. 115–122.

9. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д. Об однородных солитонах Риччи на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // ДАН. – 2015. – Т. 465, №3. – С. 281–283.

10. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Конформно плоские солитоны Риччи на группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой // Известия Алтайского гос. ун-та. – 2016. – №1(89). – С. 123–128.

11. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д. Алгебраические солитоны Риччи на метрических группах Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля // ДАН. – 2017. – Т. 472, №5. – С. 506–508.

12. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д. Алгебраические солитоны Риччи на метрических группах Ли с недиагонализируемым оператором Риччи // Известия Алтайского гос. ун-та. – 2017. – №1(93). – С. 87–90.

УДК 512.81

Об операторе секционной кривизны 3-мерных локально однородных лоренцевых многообразий

С.В. Клепикова, О.П. Хромова

АлтГУ, г. Барнаул

Одной из важных проблем (псевдо)римановой геометрии является задача об установлении связей между кривизной и алгебраической и топологической структурой (псевдо)риманова многообразия. Однако, в общем случае эта проблема является достаточно сложной. Поэтому естественно рассматривать данную задачу в более узком классе (псевдо)римановых многообразий, например, в классе локально однородных (псевдо)римановых многообразий.

Важную информацию о строении (псевдо)риманова многообразия дает исследование операторов кривизны и, в частности, их спектров.

В случае трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой возможные знаки собственных значений оператора Риччи были установлены Дж. Милнором в [1]. Далее, Ю.Г. Никоноров и А.Г. Кремлев получили подобные результаты в случае четырехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой [2, 3]. Кроме того, для трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой возможные сигнатуры спектра операторов одномерной кривизны и секционной кривизны были определены Д.С. Вороновым, Е.Д. Родионовым, В.В. Славским и О.П. Хромовой [4–6].

В случае трехмерных локально однородных римановых многообразий известна работа [7], в которой О. Ковальский и С. Никшевич нашли необходимые и достаточные условия существования локально однородного пространства с предписанными значениями оператора Риччи.

Ситуация представляется менее понятной в случае псевдоримановой метрики, т.к. тогда операторы кривизны могут быть не диагонализируемы. В случае трехмерных локально однородных лоренцевых многообразий Дж. Кальварузо и О. Ковальский нашли условия существования данных многообразий с заданным оператором Риччи (см. [8]).

В данной работе решена задача о восстановлении локально однородного лоренцева многообразия с заданным оператором секционной кривизны, что дополняет работу Дж. Кальварузо и О. Ковальского [8], а также работы авторов [4–6, 9–11]. В частности, доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Трехмерное связное, односвязное локально однородное лоренцево пространство с оператором секционной кривизны K, имеющим одно действительное (σ_1) и два комплексно-сопряженных (σ_2 и σ_3) собственных значения, существует в том и только в том случае, если

1) либо $\sigma_2+\sigma_3<0$;

2) либо $\sigma_1<\dfrac{\sigma_2+\sigma_3}{2}<-\sigma_1$.

Теорема 2. Трехмерное связное, односвязное локально однородное лоренцево пространство с оператором секционной кривизны K, имеющим единственное собственное значение кратности три, существует в том и только в том случае, если данное собственное значение отрицательно.

Помимо двух вышеприведенных теорем, в работе разобраны все варианты сочетания кратностей собственных значений оператора секционной кривизны.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 16–01–00336А, № 16–31–00048мол_а).

Библиографический список

1. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. – 1976. – V. 21. – P. 293–329.

2. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Мат. труды. – 2008. – Т. 11, №2. – С. 115–147.

3. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. труды. – 2009. – Т. 12, №1. – С. 40–116.

4. Воронов Д.С., Гладунова О.П. Сигнатура оператора одномерной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // Известия АлтГУ. – 2010. – №1–2. – С. 24–28.

5. Гладунова О.П., Оскорбин Д.Н. Применение пакетов символьных вычислений к исследованию спектра оператора кривизны на метрических группах Ли // Известия АлтГУ. – 2013. – №1/1. – С. 19–23.

6. Воронов Д.С., Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. Об инвариантных тензорных полях на группах Ли малых размерностей // Владикавказский математический журнал. – 2012. – Т. 44, №2.

7. Kowalski O., Nikcevic S. On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds // Geom. Dedicata. – 1996. – №1. – P. 65–72.

8. Calvaruso G., Kowalski O. On the Ricci operator of locally homogeneous Lorentzian 3-manifolds // Cent. Eur. J. Math. – 2009. – V. 7(1). – P. 124–139.

9. Клепикова С.В., Пономарев И.В., Хромова О.П. Об операторе секционной кривизны на трехмерных метрических группах Ли // МАК-2016: сборник трудов Всероссийской конференции по математике, 2016 г. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2016. – С. 20–22.

10. Клепикова С.В., Родионов Е.Д., Хромова О.П. Об операторах кривизны метрических групп Ли // Известия АлтГУ. – 2016. – № 1(89). – С. 129–137.

11. Клепикова С.В., Хромова О.П. Об операторе секционной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой // Известия АлтГУ. – 2017. – № 1(93). – С. 91–94.

УДК 514.7

О солитонах Риччи на 2-симметрических лоренцевых многообразиях малой размерности

Д.Н. Оскорбин, Е.Д. Родионов, И.В. Эрнст
АлтГУ, г. Барнаул

Солитоны Риччи были введены Ричардом Гамильтоном в работе [1]. Они соответствуют самоподобным решениям потока Риччи.

Метрики солитонов Риччи являются обобщениями эйнштейновых метрик и поэтому представляют интерес в теоретической физике.

Определение. (Псевдо)риманово многообразие $(\mathcal{M}, g)$ называется солитоном Риччи, если на $\mathcal{M}$ существует гладкое векторное поле S, являющееся решением уравнения:

$$\pounds_S g + \rho = \lambda g ,$$

где ρ – тензор Риччи, λ – константа, $\pounds_S$ – производная Ли вдоль S.

В настоящей работе мы рассматриваем солитоны Риччи на 2-симметрических лоренцевых многообразиях малой размерности.

Определение. (Псевдо)риманово многообразие $(\mathcal{M}, g)$ называется 2-симметрическим, если для тензора кривизны R метрики g верно равенство $\nabla^2 R = 0$, $\nabla R \neq 0$.

Для доказательства нам понадобится следующая

Теорема 1. (Д.В. Алексеевский, А.С. Галаев [2]): Пусть $(\mathcal{M}, g)$ – локально неразложимое лоренцево многообразие размерности $n+2$. Тогда $(\mathcal{M}, g)$ является 2-симметрическим тогда и только тогда, когда существуют локальные координаты $v, x^1, \ldots, x^n, u$ такие, что

$$g = 2dvdu + \sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2 + (H_{ij}u + F_{ij})x^i x^j (du)^2 ,$$

где H_{ij} – ненулевая диагональная вещественная матрица с диагональными элементами $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$, F_{ij} – симметричная вещественная матрица.