11. Клепикова С.В., Хромова О.П. Об операторе секционной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой // Известия АлтГУ. – 2017. – № 1(93). – С. 91–94.

УДК 514.7

О солитонах Риччи на 2-симметрических лоренцевых многообразиях малой размерности

Д.Н. Оскорбин, Е.Д. Родионов, И.В. Эрнст
АлтГУ, г. Барнаул

Солитоны Риччи были введены Ричардом Гамильтоном в работе [1]. Они соответствуют самоподобным решениям потока Риччи.

Метрики солитонов Риччи являются обобщениями эйнштейновых метрик и поэтому представляют интерес в теоретической физике.

Определение. (Псевдо)риманово многообразие $(\mathcal{M}, g)$ называется солитоном Риччи, если на $\mathcal{M}$ существует гладкое векторное поле S, являющееся решением уравнения:

$$\pounds_S g + \rho = \lambda g ,$$

где ρ – тензор Риччи, λ – константа, $\pounds_S$ – производная Ли вдоль S.

В настоящей работе мы рассматриваем солитоны Риччи на 2-симметрических лоренцевых многообразиях малой размерности.

Определение. (Псевдо)риманово многообразие $(\mathcal{M}, g)$ называется 2-симметрическим, если для тензора кривизны R метрики g верно равенство $\nabla^2 R = 0$, $\nabla R \neq 0$.

Для доказательства нам понадобится следующая

Теорема 1. (Д.В. Алексеевский, А.С. Галаев [2]): Пусть $(\mathcal{M}, g)$ – локально неразложимое лоренцево многообразие размерности $n+2$. Тогда $(\mathcal{M}, g)$ является 2-симметрическим тогда и только тогда, когда существуют локальные координаты $v, x^1, \ldots, x^n, u$ такие, что

$$g = 2dvdu + \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2 + (H_{ij}u + F_{ij}) x^i x^j (du)^2 ,$$

где H_{ij} – ненулевая диагональная вещественная матрица с диагональными элементами $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$, F_{ij} – симметричная вещественная матрица.

Разрешимость уравнения солитона Риччи на трехмерных 2-симметрических лоренцевых многообразиях была доказана в работе [3]. В настоящей работе дано описание общего решения:

Теорема 2. Уравнение солитона Риччи на трехмерном локально неразложимом 2-симметрическом лоренцевом многообразии локально разрешимо для любой константы λ, при этом векторное поле S в координатах (v,x,u) имеет вид:

$$S(v,x,u)=\left(\lambda v - x\omega'(u)+\mu(u), \frac{1}{2}\lambda x+\omega(u), 0\right),$$

$$\omega(u)=c_1\,\mathrm{Ai}\left(\frac{Hu+F}{H^{\frac{2}{3}}}\right)+c_2\,\mathrm{Bi}\left(\frac{Hu+F}{H^{\frac{2}{3}}}\right);$$

где

$$\mu(u)=\frac{Fu}{2}+\frac{Hu^2}{4}+\mu_0,\ \mathrm{Ai},\mathrm{Bi}\ -\ \textit{функции Эйри}.$$

Для 2-симметрических лоренцевых многообразий в размерности 4 существование решения уравнения солитона Риччи было доказано в работе [4]. Следующая теорема дает описание общего решения.

Теорема. Уравнение солитона Риччи на четырёхмерном 2-симметрическом локально неразложимом лоренцевом многообразии локально разрешимо для любой константы λ. Векторное поле S в координатах (v,x,y,u) имеет вид:

$$S=\left(\lambda v - x\eta'(u)-y\beta'(u)+\gamma(u), \frac{\lambda x}{2}+\eta(u), \frac{\lambda y}{2}+\beta(u), 0\right),\ \text{где}$$

$$\gamma(u)=\frac{(H_{11}+H_{22})u^2}{4}+\frac{(F_{11}+F_{22})u}{2}+\gamma_0,$$

функции η и β являются решениями системы уравнений:

$$\begin{cases}\eta''(u) &= \eta(u)(H_{11}u+F_{11})+F_{12}\beta(u)\\ \beta''(u) &= \beta(u)(H_{22}u+F_{22})+F_{12}\eta(u)\end{cases}$$

В настоящей работе также доказана

Теорема 3. Уравнение солитона Риччи на пятимерном 2-симметрическом лоренцевом многообразии локально разрешимо для любой константы λ. Частное решение S в координатах (v,x,y,z,u) имеет вид:

$$S=(V,X,Y,Z,U),$$

$$V = \lambda v + (H_{11} + H_{22} + H_{33})\frac{u^2}{4} + (F_{11} + F_{22} + F_{33})\frac{u}{2}$$

$$X = \frac{1}{2}\lambda x$$

$$Y = \frac{1}{2}\lambda y$$

$$Z = \frac{1}{2}\lambda z$$

$$U = 0$$

Работа выполнена при поддержке РФФН (грант № 16-01-00336А).

Библиографический список

1. Hamilton R.S. // Contemporary Mathematics. – 1988. – V. 71. – P. 237–261.

2. Alekseevsky D.V., Galaev, A.S. Two-symmetric Lorentzian manifolds // Journal of Geometry and Physics. – 2011. – V. 61, №12. – P. 2331–2340.

3. Gavino-Fernandez S. The geometry of Lorentzian Ricci solitons, Ph.D. Thesis, Publicaciones del Departamento de Geometria y Topologia, Universidade de Santiago de Compostela. – 2012. – P. 105.

4. Onda K., Batat W. Ricci and Yamabe solitons on second-order symmetric, and plane wave 4-dimensional Lorentzian manifolds // Journal of Geometry. – 2014. – V. 105 Issue 3. – P. 561–575.

УДК 514.142

Определённость эники конечным набором точек

И.В. Поликанова

АлтГПА, г. Барнаул

Изучая линии с аффинно-эквивалентными дугами [1–4], автор вышел на кривую, задаваемую в некоторой аффинной системе координат (АСК) в n-мерном действительном аффинном пространстве A^n параметризацией

$$\vec{r} = (u, u^2, ..., u^n),\ u \in I, \tag{1}$$

(I – числовой промежуток), но имени её в анналах Интернета не обнаружил. Выявив ряд замечательных качеств этой незнакомки, мы сочли несправедливым оставлять её и впредь безымянной и нарекли *эникой* или «*n*-ica», отталкиваясь от схожего наименования «кубика» для n =