Секция 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

УДК 517

Анализ зависимости скорости протаивания мерзлого грунта от температурного режима и интенсивности осадков

А.С. Алейников, А.Г. Петрова
АлтГУ, г. Барнаул

Работа посвящена исследованию влияния интенсивности осадков, температуры поверхности и глубины залегания на скорость протаивания вечной мерзлоты. Исследование процессов протаивания и промерзание почв имеют большое значение для сельскохозяйственных районов Западной Сибири и северных территорий.

Рассматривается одномерная задача без учета силы тяжести, испарения, наличия вегетативного слоя и излучения.

Область $0 < x < \xi(t)$ занята грунтом, который рассматривается как пористая среда с неподвижными скелетом и порами, заполненными водой и воздухом. Область $\xi(t) < x < Y$– мерзлый грунт, в котором лед в порах и сам скелет неподвижны и все поры заняты льдом.

Модель строится в следующих предположениях: вода и лед несжимаемые; воздух – вязкий совершенный газ; температура и давление общие для скелета и пор; поверхность грунта подвержена воздействию выпадающего с определенной скоростью и температурой дождя. Силой тяжести пренебрегаем. Определяющие уравнения в талом грунте представляют собой законы сохранения массы, энергии, дополненные обобщенным законом Дарси и уравнением состояния совершенного газа [1, 2].

В области инфильтрации осадков выполнены следующие уравнения относительно неизвестных функций: влагонасыщенности S, плотности воздуха в порах ρ_a, температуры T и давления P.

$$n\rho_w \frac{\partial}{\partial t} S_w + \rho_w \frac{\partial}{\partial x} v_w = 0; \quad n\frac{\partial}{\partial t}\rho_a(1-S_w) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_a v_a) = 0;$$

$$v_i = -\frac{kf_i(S_w)}{\mu_i}\left(P_x - \rho_i \,\mathrm{g}\right), P = \rho_a RT, j = a, w,$$

$$(\rho C)_m \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}[P(v_a + v_w)] + (\rho_w C_w v_w + \rho_a C_a v_a)\frac{\partial}{\partial x}T = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_m \frac{\partial}{\partial x}T\right);$$

где

$$f_w(S_w) = S_w, \quad f_a(S_w) = (1 - S_w).$$

Здесь: ρ_i, ρ_w, ρ_a – плотности льда, воды и воздуха, μ_w, μ_a – коэффициенты вязкости, C_w, C_a, C_s – удельные теплоемкости, k, q – проницаемость и удельная скрытая теплота фазового перехода, R – универсальная газовая постоянная, n – пористость.

Нижние индексы a, w, i, s относятся к характеристикам воздуха, воды, льда и скелета грунта соответственно, нижние индексы m, f указывают на усредненную (эффективную) характеристику соответственно талого и мерзлого грунта, которая здесь вычисляется как средневзвешенная [3].

На дневной поверхности заданы температура осадков, насыщенность

$$T(0,t) = T_0, \quad S(0,t) = S_0;$$

и условие

$$-\frac{kSP_0}{\mu_a \mu_w \xi(t)} \frac{\partial P}{\partial n}\bigg|_{\eta=0} = N(t),$$

где $N(t)$ – скорость дождя (объем воды, выпавший на единицу поверхности за единицу времени).

На границе фазового перехода $x = \xi(t)$ выполнены условия для температуры и давления

$$\mathrm{T}(1,t)=T_{gr}, \quad \mathrm{P}(1,t)=P_{atm}.$$

Кроме того, выполнены следующие условия, являющиеся следствиями законов сохранения:

$$\left(S_w - \frac{\rho_i}{\rho_w}\right)\dot{\xi}(t) = -\frac{k}{n\mu_w} f_w(S_w) \frac{\partial}{\partial x} P_m(\xi(t), t),$$

$$(S_w - 1)\dot{\xi}(t) = -\frac{k}{n\mu_a}\left(-f_a(S_w)\frac{\partial}{\partial x} P_m(\xi(t), t)\right),$$

$$nq\rho_i \dot{\xi}(t) = -\lambda_m \frac{\partial}{\partial x} T_m(\xi(t), t).$$

Последнее условие – это условие Стефана[3], в котором q – удельная скрытая теплота фазового перехода. Скорость фазовой границы в нашем случае равна $\dot{\xi}(t)$.

Для того что бы замкнуть задачу нам необходимо задать начальные распределения температуры, насыщенности и давления

$$\mathrm{T}(x,0)=T(x), \mathrm{S}(x,0)=S(x), \mathrm{P}(x,0)=P(x).$$

удем искать решение, для которого все поры в мерзлом грунте заняты льдом, а температура тождественно равна температуре фазового перехода (однофазная задача).

В целях численного исследования исходная система (1) приводится к безразмерному виду и преобразуется в задачу, определенную в фиксированной путем замены переменной [4]:

$$\eta = \frac{x}{\xi(t)}.$$

Для дальнейшего исследования воспользуемся следующим алгоритмом: зададим начальные распределения температуры, насыщенности и давления; решаем задачу для температуры T и давления P с известной насыщенностью S и положением фронта $\xi(t)$; находим новые значения насыщенности; вычисляем новое положение свободной границы. На каждом временном слое проводятся итерации.

Результаты численных расчетов показали, что температура и интенсивность выпадения осадков оказывают значительное влияние на скорость протаивания мерзлого грунта.

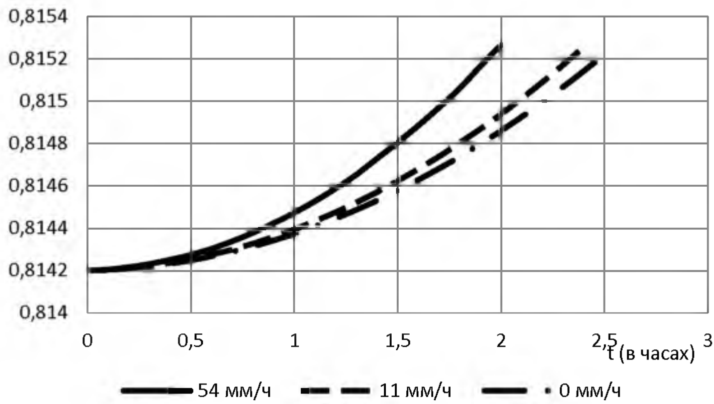

Рисунок 1 – Положение фронта при начальной глубине мерзлой зоны 0,8142 м

На рисунке 1 приведены результаты расчетов процесса протаивания грунта (в метрах) в зависимости от времени для трех значений интенсивности дождя (0, 11 и 54 мм/ч). В частности, время протаивания грунта на 0,1 см при начальной глубине 0,8142 метра при различной интенсивности осадков варьируется примерно от 1часа 50 минут до двух с половиной часов.

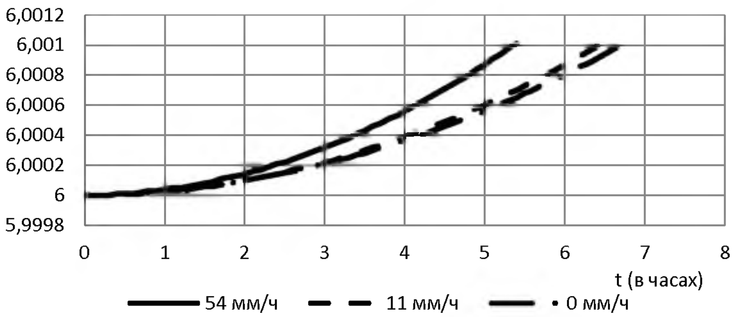

Рисунок 2 – Положение фронта при начальной глубине мерзлой зоны 6 м

На рисунке 2 приведены результаты расчетов процесса протаивания грунта (в метрах) в зависимости от времени для трех значений интенсивности дождя (0, 11 и 54 мм/ч) при начальной глубине промерзания, равной 6 м.

Расчеты показали, что при увеличении интенсивности выпадающих осадков значительно увеличивается скорость протаивания грунта. Если вечная мерзлота находится на малой глубине, то грунт, на который выпадает сильный дождь, протает на полчаса раньше, чем грунт, на который осадки не воздействуют.

Можно заметить, что при значительном увеличении начальной глубины так же увеличивается и время, необходимое для протаивания участка глубиной 0,1 см. На глубине шести метров разница во времени протаивания в случаях сильного ливня и отсутствия осадков будет уже около часа.

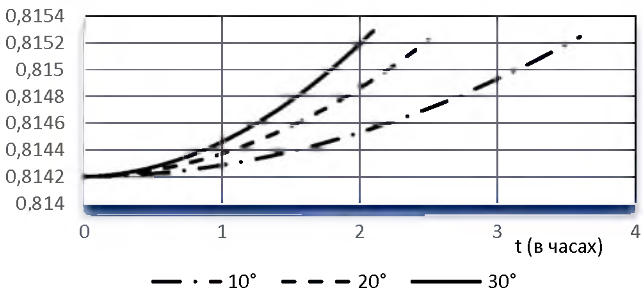

Рисунок 3 – Результаты расчетов процесса протаивания грунта в зависимости от времени для трех значений температуры (10, 20 и 30 град.)

На рисунке 3 представлены результаты расчета процесса таяния участка глубиной 0,1 см при начальном положении фазовой границы 0,8142 метра при отсутствии дождя.

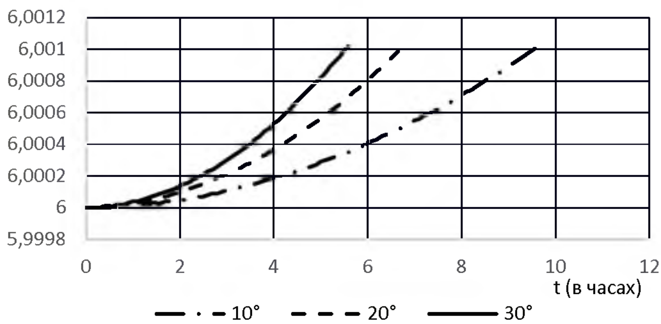

Рисунок 4 – Результаты расчетов процесса протаивания грунта в зависимости от времени для трех значений температуры (10, 20 и 30 град.)

На рисунке 4 представлены результаты расчета процесса таяния участка глубиной 0,1 см при начальном положении фазовой границы 6 метров в случае отсутствия осадков.

Численные расчеты показали, что чем выше температура на верхней границе, тем быстрее происходит процесс таяния. На большой глубине (6 м) в случае отсутствия осадков при температуре поверхности 30 градусов слой грунта толщиной 0,1 см протаивает почти в 2 раза быстрее, чем при температуре 10 градусов.

Для расчетов выбраны значения исходных параметров, использованные в [2, 5].

Библиографический список

1. Васильев В.И., Максимов А.М., Петров Е.Е., Цыпкин Г.Г. Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. – М., 1996.

2. Петрова А.Г., Мошкин Н.П., Жирков А.Ф., Задача о возмущениях фазового фронта в ненасыщенном грунте под действием инфильтрации осадков // Известия Алтайского государственного университета – Барнаул, 2015. – Т. 1, №1 (85). – С. 100–106.

3. Мейрманов А.М., Задача Стефана – Новосибирск, 1999. – Т. 40, №3.

4. Воеводин А.Ф., Гранкина Т.Б. Численное моделирование роста ледяного покрова в водоеме // Сиб. журн. индустр. математики. – 2006. – Т. 9, №1 (25).

УДК 517.958 + 631.459.26

Обоснование одной задачи внутренней эрозии грунта

С.В. Алексеева, А.А. Папин
АлтГУ, г. Барнаул

Постановка задачи

В работе рассматривается математическая модель изотермической внутренней эрозии без учета деформации пористой среды. Фильтрация подземных вод происходит в водоносном горизонте. При достижении определенной величины скорости фильтрации происходит вынос частиц грунта из области течения и образование подземных полостей. В результате увеличения и достижения критических размеров этих полостей происходит обрушение свода пород.

В работе изучается следующая система уравнений составного типа:

$$\frac{\partial s\phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\big(K_0(\phi)a(s)\nabla s - b(s)v(t) + F(s,\phi)\big), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} = -I(s,\phi), \qquad (2)$$

решаемая в области $(x,t) \in Q_T = Q \times (0,T), Q = (0,1)$,
при краевых и начальных условиях

$$s(0,t) = s_0(t), \quad s(1,t) = s_1(t),$$

$$s(x,0) = s^0(x), \quad \phi(x,0) = \phi^0(x). \qquad (3)$$

Данная начально-краевая задача описывает одномерное движение двухфазной смеси в неподвижной пористой среде, состоящей из твердых частиц и жидкости [1]. Здесь ϕ – пористость, s – насыщенность воды, I – интенсивность перехода массы из твердого скелета; кроме того $K_0(\phi)$, $a(s)$, $b(s)$, $F(s,\phi)$ – заданные функции. Задача записана в эйлеровых координатах x,t. Искомыми являются величины s и ϕ. Обзор математических моделей процесса суффозии дан в работе [1]. Математическое обоснование, как правило, отсутствует, за исключением рассмотрения частных решений [3–5]. Вывод уравнений (1), (2) дан в работе [6]. Система уравнений близка по структуре уравнениям двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей в случае известной пористости [7–9]. Особенностью данной задачи является необходимость обоснования физического принципа максимума для пористости ϕ и насыщенности s вида $0 \le \phi \le 1$,