9. Папин А.А. Существование решения «в целом» уравнений одномерного неизотермического движения двухфазной смеси. 1. Постановка задачи и вспомогательные утверждения // Сиб. журн. индустр. математики. – Новосибирск, 2006. – Т. 9, №2 (26). – С. 116–136.

10. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.

11. Кружков С.Н., Сукорянский С.М. Краевые задачи для систем уравнений типа двухфазной фильтрации; постановка задач, вопросы разрешимости, обоснование приближенных методов // Матем. сб. – 1977. – Т. 104(146), №1(9). – С. 69–88.

УДК 517.95 + 631.459.26

Математическая модель абляции льда

Н.Ю. Глебова, А.А. Папин
АлтГУ, г. Барнаул

Постановка задачи

В работе изучается модель, описывающая процесс сублимации льда. Лёд рассматривается как деформируемая пористая среда, в порах которой движется влажный воздух. В основе рассматриваемой модели лежат уравнения сохранения масс с учётом фазового перехода, закон Дарси для влажного воздуха, учитывающий движение пористого скелета, реологическое уравнение для пористости, уравнения равновесия и сохранения энергии для системы лёд-воздух [1–3]

$$\frac{\partial \phi\rho_f}{\partial t} + div(\phi\rho_f\vec{u}_f) = S, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + div((1-\phi)\rho_s\vec{u}_s) = -S, \tag{2}$$

$$\phi(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = -K_0\frac{k}{\mu}(\nabla p_f + \rho_f\vec{g}), \tag{3}$$

$$\left(\rho_f\phi + \rho_s(1-\phi)\right)\frac{\partial\theta}{\partial t} + \left(\rho_f\phi\vec{u}_f + \rho_s(1-\phi)\vec{u}_s\right)\nabla\theta = div(\lambda_c\nabla\theta) - \mu\frac{\partial\rho_f\phi}{\partial t}, \tag{4}$$

$$p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s,\quad p_e = (1-\phi)(p_s - p_f),$$
$$\rho_{tot} = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s, \tag{5}$$

$$p_f = \rho_f R\theta,\quad \nabla\cdot\vec{u}_s = -a(\phi)p_e,\quad \nabla p_{tot} = \rho_{tot}\vec{g}. \tag{6}$$

Здесь $\rho_f, \rho_s, \vec{u}_f, \vec{u}_s$ – соответственно истинные плотности и скорости влажного воздуха и льда; ф – пористость; $p_f(\rho_f, \theta), p_s$ – соответственно давление льда и пара; p_e – эффективное давление; θ – температура среды, $S(\phi, \rho_f)$ – интенсивность фазового перехода «лёд – влажный воздух»; K_0 – тензор фильтрации; k – проницаемость; μ – динамическая вязкость газа; $a(\phi), c_f, c_s, \lambda_c$ – параметры пороупругой среды; R – универсальная газовая постоянная.

Интенсивность фазового перехода (сублимации) определяется следующим образом [4]:

$$S = \begin{cases} G\phi(1-\phi)(\rho_f - \rho_n), & \rho_f < \rho_n \\ 0, & \rho_f > \rho_n \end{cases};$$

$$G = \frac{3\rho_s}{\rho_n r^2 \left(\frac{L_s}{K\theta Nu}(\frac{L_s M}{R\theta} - 1) + \frac{1}{D\rho_n Sh})\right)},$$

где L_s – теплота сублимации льда; M – молекулярная масса воды; r – радиус частицы; D – коэффициент диффузии; K – молекулярная теплопроводность в атмосфере; ρ_n – плотность насыщенного водяного пара; Nu – число Нуссельта; Sh – число Шервуда.

Данная система описывает движение воздуха в деформируемой пористой среде с учётом фазового перехода «лёд – воздух». Математическое обоснование постановок начально-краевых задач для системы (1)–(7) отсутствует. В случае $S = 0$ система рассматривалась в работах [5–7]. Близкие вопросы рассматривались в [8–11].

Для системы (1)–(7) рассматривается следующая модельная задача: лёд неподвижен ($\vec{u}_s = 0$), температура постоянна ($\theta = const$), сила тяжести отсутствует, движение является одномерным. В результате приходим к системе

$$\frac{\partial(\rho_f \phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_f \phi u_f) = S,$$

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} = -S,$$

$$\phi u_f = -kR\theta \frac{\partial \rho_f}{\partial z}.$$

Рассматривается автомодельное решение типа «бегущей волны» $\xi = z - ct, c < 0$ и $-\infty \le \xi \le 0$

$$\frac{d}{d\xi}((-c + u_f)\rho_f \phi) = S, \tag{7}$$

$$\frac{d}{d\xi}(-c\rho_s(1-\phi)) = -S, \quad \phi u_f = -kR\theta \frac{d\rho_f}{d\xi}. \tag{8}$$

Складывая уравнение (8) и первое в (9) получим интеграл

$$-c(\rho_f\phi + \rho_s(1-\phi)) + u_f\rho_f\phi = A_1.$$

Граничные условия имеют вид

$$u_f(0) = u^+, \phi(0) = \phi^+, \rho_f(0) = \rho^+, \lim_{\xi\to-\infty} u_f(\xi) = 0,$$

$$\lim_{\xi\to-\infty} \phi(\xi) = \phi^-, \lim_{\xi\to-\infty} \rho_f(\xi) = \rho^-.$$

Для постоянных $c < 0$ и A_1, в случае $\phi^+(\rho^+ + \rho_s) - \phi^-(\rho^- + \rho_s) \neq 0$, справедливо представление

$$c = \frac{u^+\rho^+\phi^+}{\phi^+(\rho^+ + \rho_s) - \phi^-(\rho^- + \rho_s)},$$

$$A_1 = u^+\rho^+\phi^+ - \frac{u^+\rho^+\phi^+}{\phi^+(\rho^+ + \rho_s) - \phi^-(\rho^- + \rho_s)}(\rho_f\phi + \rho_s(1-\phi)).$$

В результате стандартных преобразований приходим к следующей системе для определения ρ_f и ϕ:

$$k(\phi)R\theta\frac{d\rho_f}{d\xi} = |c|\left(\phi + \frac{\rho_s}{\rho_f}(1-\phi)\right) - \frac{A_1}{\rho_f},$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\ln\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right)\right) = -\frac{G(\rho_f - \rho_n)}{|c|\rho_s}.$$

Основным результатом работы является доказательство принципов максимума для ρ_f и ϕ, вида $0 < \rho_f < \rho_n$ и $0 \le \phi \le 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ «Гидроупругие и термодинамические эффекты при взаимодействии пороупругого снежно-ледового покрова с конструкциями», №16-08-00291, РФФИ «Расчет физических характеристик почвогрунтов в процессе внутренней эрозии и прогноз их разрушения» №17-41-220314.

Библиографический список

1. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. – М.: Мир, 1971. – 452 с.

2. Кучмент Л.С., Демидов В.Н., Мотовилов Ю.Г. Формирование речного стока. Физико-математические модели. – М.: Наука, 1983. – 214 с., с. 105.

3. Fowler, A.C., and X.Yang (1999), Pressure solution and viscous compaction in sedimentary basins, J. Geophys. Res., 104, 12,989–12,997.

4. Groot Zwaaftink C. D., Löwe H., Mott R., Bavay M., and M. Lehnin. Drifting snow sublimation : A high-resolution 3-D model with temperature and moisture feedbacks, 2011.

5. Токарева М.А. Конечное время стабилизации решения уравнений фильтрации жидкости в пороупругой среде // Известия Алтайского государственного университета. – 2015. – Т. 2, №1. – С. 153–157.

6. Tokareva M.A. Solvability of in initial boundary value problem for the equations of filtration in poroelastic media // Journal of Physics: Conference Series. – 2016. – V. 722, №1. – P. 012037.

7. Ахмерова И.Г., Папин А.А., Токарева М.А Математические модели механики неоднородных сред : учебное пособие. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2012. – Ч. 1.

8. Папин А.А., Разрешимость модельной задачи тепломассопереноса в тающем снеге // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49, № 4(290). – С. 13–24.

9. Shishmarev K., Khabakhpasheva T., Korobkin A. The response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Applied Ocean Re-search 59 (2016) 313–326.

10. Papin A.A., Sibin A.N. Model isothermal internal erosion of soil // J. Phys.: Conf. Ser. Volume 722, conference 1. – 2016. – P. 1–8.

11. ПапинА.А., Сибин А.Н. Автомодельное решение задачи поршневого вытеснения жидкостей в пороупругой среде // Известия АлтГУ. – 2016. – №1(89). – С. 152–156.

532.5, 519.63

Численное моделирование процесса формирования жидкого сферического микробаллона, содержащего пузырек газа

А.В. Закурдаева, Е.В. Резанова

АлтГУ, г. Барнаул

В настоящее время в связи с разработкой новых материалов, содержащих в своей структуре так называемые микробаллоны, актуальность приобрела задача математического моделирования течений в сферических жидких слоях, содержащих пузырьки газа.

В данной работе проводится численное моделирование динамики жидкой оболочки, заключающей в себе пузырек газа. Этот же газ растворен в жидкости в качестве пассивной добавки [1–3]. Задача рассматривается в сферически симметричной постановке ввиду предположения об условиях кратковременной невесомости процесса. Таким образом, все определяемые в ходе решения физические величины зависят от времени и радиальной координаты. Коэффициенты кинематической вязкости, поверхностного натяжения, диффузии, температуропроводности и коэффициент в законе Генри зависят от температуры.

Математическое моделирование физических процессов в жидком слое основано на уравнениях Навье-Стокса, переноса тепла и диффу-