$$v = -y(t+1)^{-1},\ \ u = x(t+1)^{-1};$$

$$A = S_{xx} = x^2 a(t) + d(t) = x^2 h(t) + d(t) = x^2 \exp\left(-tW_i^{-1}\right) + d(t);$$

$$B = S_{xy}(t,x,y) = xb(t,y) = x\xi g(t) = xy \exp\left(-tW_i^{-1}\right);$$

$$C = S_{yy}(t) = c(t) = f(t) = \left[2\left(W_i - (t+1)\right) + c_6 \exp\left(-tW_i^{-1}\right)\right](t+1)^{-2}$$

Давление восстанавливается с помощью квадратур

$$p(t,x,y) = \frac{1}{2}\frac{(x^2+y^2)(t+1)^2 exp(-tW_i^{-1}) - (1+y)x^2 - 3y^2}{(t+1)^2}.$$

Работа поддержана грантом Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ НШ-8146.2016.1 и грантом РФФИ (проект 16-01-00127).

Библиографический список

1. Астарита Дж., Марручи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. – М.: Мир, 1978. – 312 с.

2. Пухначев В.В. Математическая модель несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. – 2010. – Т. 51, №4. – С. 116–126.

3. Ляпидевский В.Ю., Пухначев В.В. Гиперболические подмодели несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // Современные проблемы механики: сборник статей к 80-летию со дня рождения академика А.Г. Куликовского, Тр. МИАН, 281, МАИК, М., 2013, 84–97.

УДК 517.958

Разрешимость задачи фильтрации в пороупругой среде в классе непрерывных функций

А.А. Папин, М.А. Токарева

АлтГУ, г. Барнаул

Постановка задачи

В работе рассматривается математическая модель фильтрации жидкости в пороупругой среде. В предположении, что пороупругая среда обладает преимущественно вязкими свойствами, данный процесс может быть описан следующим нелинейным уравнением для пористости φ [1, 2, 3]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varphi}{1-\varphi}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(\varphi)\left((1-\varphi)\frac{\partial^2 G(\varphi)}{\partial x \partial t} - g(\rho_{tot} + \rho_f)\right)\right), \tag{1}$$

которое решается в области $(x,t)\in Q_T = Q\times(0,T), Q=(0,1)$, при краевых и начальных условиях

$$\varphi|_{t=0} = \varphi^0, (k(\varphi)((1-\varphi)\frac{\partial^2 G(\varphi)}{\partial x \partial t} - g(\rho_{tot}+\rho_f)))|_{x=0,1} = 0, \qquad (2)$$

Здесь функция $G(\varphi)$ определяется равенством $dG/d\varphi = \xi(\varphi)/(1-\varphi)$, $\rho_{tot} = (1-\varphi)\rho_s + \varphi\rho_f$ – общая плотность, ρ_f, ρ_s соответственно плотности жидкой и твердой фаз, g – плотность массовых сил, $k(\varphi)$ – коэффициент фильтрации, $\xi(\varphi)$ – коэффициент объемной вязкости (заданные функции).

Определение. Решением задачи (1)–(2) называется функция $\varphi\in C(Q_{t_0})\cap C^2(\Omega)$, такая, что $0<\varphi<1$, а также удовлетворяет уравнению (1) и начальным и граничным условиям (2) как непрерывная в $\overline{Q}_T$ функция.

Теорема. Пусть данные задачи (1)–(2) подчиняются следующим условиям: 1) функции $k(\varphi),\xi(\varphi)$ и их производные до второго порядка непрерывны для $\varphi\in(0,1)$ и удовлетворяют условиям

$$k_0^{-1}\varphi^{q_1}(1-\varphi)^{q_2} \le k(\varphi) \le k_0\varphi^{q_3}(1-\varphi)^{q_4}, \frac{1}{\xi(\varphi)} =$$
$$= a_0(\varphi)\varphi^{\alpha_1}(1-\varphi)^{\alpha_2 - 1}, 0 < R_1 \le a_0(\varphi) \le R_2 < \infty,$$

где $k_0,\alpha_i,R_i, i=1,2$ – положительные постоянные, $q_1,\ldots,q_4$ – фиксированные вещественные числа, 2) функция g, начальная функция φ^0 удовлетворяет следующим условиям гладкости $g\in C^1(\overline{Q}_T)\cap C^1(\Omega)$, $\varphi^0\in C^2(\overline{\Omega})$, а также функции φ^0 и g удовлетворяют неравенствам $0<m_0\le\varphi^0(x)\le M_0<1$, $|g(x,t)|\le g_0<\infty$, $x\in\overline{\Omega}$, где m_0, M_0, g_0 – известные положительные константы. Тогда задача (1)–(2) имеет единственное локальное решение, т.е существует значение t_0 такое, что $\varphi\in C(Q_{t_0})\cap C^2(\Omega)$, $\varphi\in(0,1)$. Более того $0<\varphi(x,t)<1$ в $\overline{Q}_{t_0}$.

Доказательство теоремы

Поскольку функция $G(\varphi)=\psi$ монотонно возрастает при $\varphi\in(0,1)$, то существует обратная функция $\varphi = G^{-1}(\psi)$. Положим $z=\partial G/\partial t$ и вместо уравнения (1) с условиями (2) рассмотрим начально-краевую задачу для системы относительно функций G, z:

$$z = \frac{\partial G}{\partial t}, G|_{t=0} = G^0(x), \tag{3}$$

$$\frac{z}{d(G)} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(G)\frac{\partial z}{\partial x} - b(G)\right) = 0, \quad \left(a(G)\frac{\partial z}{\partial x} - b(G)\right)|_{x=0,x=1} = 0, \tag{4}$$

где

$$d(G) = (1-\varphi(G))\xi(\varphi(G)), a(G) = k(\varphi(G))(1-\varphi(G)),$$
$$b(G) = k(\varphi(G))g((1-\varphi(G))\rho_s + (1+\varphi(G))\rho_f), G(m_0) \le G^0(x) \le G(M_0).$$

Поскольку $0 < m_0 \le \varphi^0(x) \le M_0 < 1$ и $G(m_0) \le G^0(x) \le G(M_0)$, то из (3) имеем, что при $t_0 \ge t > 0$ справедлива оценки вида

$$\begin{gathered} G_1(m_0) \le G(m_0) - c_0 t_0 \le G(x,t) \le G(M_0) + c_0 t_0 \le G_2(M_0), \\ 0 < m_1 \equiv G^{-1}(G_1(m_0)) \le \varphi(x,t) \le G^{-1}(G_2(M_0)) \equiv M_1 < 1. \end{gathered} \tag{5}$$

Пусть $G_0(x,t)$ – непрерывная по x и t функция, удовлетворяющая неравенству (5) и имеющая непрерывную по x,t производную $\partial G_0 / \partial x$. Подставляя эту функцию в коэффициенты уравнения и условий (4), приходим к линейной задаче, в которой $a > 0, b > 0$ и $d > 0$. Решение этой задачи единственно. Существование следует из теоремы Гильберта [4, с. 334] для обыкновенных линейных уравнений второго порядка. Переменная t играет роль параметра. Тем самым, $(z, z_x, z_{xx}) \in C(Q_{t_0})$. После нахождения $z(x,t)$ можно найти из (3) новое значение $G(x,t)$, удовлетворяющее (5).

Для доказательства разрешимости задачи (3)–(4) воспользуемся методом последовательных приближений. Пусть $z^i(x,t)$ и $G^i(x,t)$ – решение задачи

$$\frac{\partial G^{i+1}}{\partial t} = z^{i+1}, G^{i+1}(x,0) = G^0(x), \tag{6}$$

$$\frac{z^{i+1}}{d(G^i)} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(G^i)\frac{\partial z^{i+1}}{\partial x} - b(G^i)\right) = 0, \quad \left(a(G^i)\frac{\partial z^{i+1}}{\partial x} - b(G^i)\right)|_{x=0,x=1} = 0, \tag{7}$$

где $i = 0,1,2,\ldots$. Подставляя на первом шаге $G^0(x)$ в (7) находим $z^1(x,t)$. После этого из (6) находим $G^1(x,t)$ и т.д. При каждом i существует единственное решение $z^i(x,t)$ и $G^i(x,t)$, удовлетворяющее (5). Докажем, что $z^i(x,t)$ и $G^i(x,t)$ фундаментальны в $C(Q_{t_0})$. Для этого сначала получим равномерные по i оценки. При $i=0$ коэффициенты (7) удовлетворяют условиям:

$$d_1 \le d(G^0) \le d_2, \quad \frac{1}{d} \le \frac{1}{d_1}, \quad h_1 \le a(G^0) \le h_2, \quad \frac{1}{a} \le \frac{1}{h_1}, \quad |b(G^0)| \le b_2, \tag{8}$$

где d_1, d_2, h_1, h_2, b_2 зависят только от m_1, M_1 и фиксированных ρ_s, ρ_f, g_0, K_0 Умножая (6) на z^1 и интегрируя по $x \in [0,1]$, с учетом (7) получим

$$\int_0^1 (|z^1|^2 + |z_x^1|^2)dx \le c_1(m_1, M_1) = \frac{b_2}{2d_1 \min\{1, d_1/2\}}.$$

Следовательно,

$$(\max_{(x,t)\in Q_t} z^1)^2 \le (\int_0^1 z^2 dx + 2(\int_0^1 z^2 dx)^{1/2} (\int_0^1 z_x^2 dx)^{1/2}) \le 3c_1(m_1, M_1).$$

Из (6) имеем

$$|G^1(x,t) - G^0(x)| = |\int_0^1 z^1(x,t)dx| \le \sqrt{3c_1(m_1, M_1)}t.$$

Берем в (5) $c_0 = \sqrt{3c_1}$ и для достаточно малого t_0 приходим к неравенству $G_1(m_1) \le G^1(x,t) \le G_2(M_1)$. В терминах φ имеем

$$0 < m_1 \equiv G^{-1}(G_1(m_0)) \le \varphi \le G^{-1}(G_2(M_0)) \equiv M_1 < 1.$$

Тогда $\max\limits_{(x,t)} |z|$ оценивается одной и той же постоянной и, следовательно, выбирается одно и то же t_0. Итак

$$\max_{(x,t)} |z^i(x,t)| \le c_0(m_1, M_1), \quad m_1 \le G^i(x,t) \le M_1.$$

После этого из (7) сначала получим $|z_x^i(x,t)| \le c_2$ и, следовательно, $|G_x^i| \le c_3$, и значит $|z_{xx}^i| \le c_4$, равномерно по i. Далее положим $y^{i+1} = z^{i+1} - z^i, \omega^{i+1} = G^{i+1} - G^i$. Из (6)–(7) выводим

$$\frac{\partial \omega^{i+1}}{\partial t} = y^{i+1}, \quad \omega^{i+1}(x,0) = 0, \tag{9}$$

$$\frac{y^{i+1}}{d(G^i)} + A_1\omega^i - \frac{\partial}{\partial x}(ay_x^{i+1} + A_2\omega^i) = 0, \quad (ay_x^{i+1} + A_2\omega^i)|_{x=0,x=1} = 0, \tag{10}$$

где A_1, A_2 легко восстанавливаются и являются ограниченными. Имеем из (10) следующее неравенство

$$\int_0^1 (|y^{i+1}|^2 + |y_x^{i+1}|^2)dx \le c_5 \int_0^1 |\omega^i|^2 \, dx. \tag{11}$$

Из (9) следует $\max\limits_x |\omega^{i+1}| \le \int_0^t \max\limits_x |y^{i+1}| \, d\tau$. Т.о. $\max\limits_x |y^{i+1}|^2 \le 2c_5 t \int_0^1 |\omega^i|^2 \, dx$, а значит $z^{i+1} \le 2c_5 t \int_0^t z^i d\tau$. Откуда следует, что $z^i \to 0, \omega^i \to 0$ [5, с. 27]. Т.о. теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ «Расчет физических характеристик почвогрунтов в процессе внутренней эрозии и прогноз их разрушения» №17-41-220314, «Гидроупругие и термодинамические эффекты при взаимодействии пороупругого снежно-ледового покрова с конструкциями» №16-08-00291.

Библиографический список

1. Папин А.А., Токарева М.А. О разрешимости в целом начально-краевой задачи для системы уравнений, описывающей движение магмы // Известия Алтайского государственного университета. – 2017. – №1(93). – С. 115–119.

2. Tokareva M.A. Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration in poroelastic media // Journal of Physics: Conference Series. – 2016. – Т. 722, №1. – С. 012–037.

3. Папин А.А., Токарева М.А. Модельная задача о движении сжимаемой жидкости в вязкоупругои горной породе // Известия Алтайского государственного университета. – 2010. – №1-1. – С. 35–37.

4. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. – М.: Наука, 1981. – 383 с.

5. Папин А.А. Краевые задачи двухфазной фильтрации. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2009. – 220 с.

УДК 532.546 + 544.344.015.4

Математическое моделирование процесса сублимации снега

А.А. Папин, Е.С. Юст
АлтГУ, г. Барнаул

Постановка задачи

В работе рассматривается математическая модель движения воды и воздуха в снеге с учетом сублимации. Снег представляет собой пористую среду, твердый каркас которой составляют неподвижные