2. Папин А.А., Сибин А.Н. О разрешимости первой краевой задачи для одномерных уравнений внутренней эрозии // Известия АлтГУ. – Барнаул, 2015. – Вып. 1/2 (85). – С. 136–140.

3. Wang J., Walters D.A., Settari A., Wan R.G. Simulation of cold heavy oil production using an integrated modular approach with emphasis on foamy oil flow and sand production effects // 1st Heavy Oil Conference. – 2006.

4. Vardoulakis I., Stavropoulou M., Papanastasiou R. Hydro-Mechanical Aspects of the Sand Production Problem // Transport in Porous Media. – 1996. – V. 22. – P. 225–244.

5. Сибин А.Н., Сибин Н.Н. Численное решение одномерной задачи фильтрации с учетом суффозионных процессов // Известия АлтГУ. – 2017. №1(93). – С. 123–127.

6. Chetti A., Benamar A., Hazzab A. Modeling of Particle Migration in Porous Media:Application to Soil Suffusion // Transport in Porous Media. – 2016. – V. 113(3). – P. 591–606.

УДК 519.6

О решении одномерных сеточных уравнений несжимаемой жидкости с краевыми условиями по формуле Вудса

Ш.А. Уальжанова, С.Ф. Аменова
ВКГУ им.С. Аманжолова, г. Усть-Каменогорск

Одно из направлений численного исследования двумерных течений несжимаемой жидкости основывается на решении уравнений Навье-Стокса, записанные в переменных «функция тока, вихрь скорости» с применением различных способов задания граничных условий для вихря скорости [1–7]. Наряду с популярной формулой Тома [1–6] для вихря скорости с успехом используется формула Вудса [14], который имеет второй порядок точности. В работе [4] исследовалась корректность разностных начально-краевых задач для уравнения Стокса при использовании для вычисления граничных условий формул первого и второго порядка аппроксимации (Тома и Вудса).

В работе [5] исследуется устойчивость неявных разностных схем для двумерных уравнений, записанные для переменных «функция тока-вихрь скорости». В настоящей исследовательской работе рассматривается одномерная разностная задача, получены оценки скорости сходимости одномерных итерационных алгоритмов, результаты которой, используются в дальнейших наших исследованиях двумерных задач для несжимаемой жидкости.

Постановка задачи. В области $D=\{0\le x\le 1\}$ рассмотрим систему стационарных уравнений для несжимаемой жидкости следующего вида

$$\omega_{xx}=f(x), \tag{1}$$

$$\psi_{xx}=\omega, \qquad 0<x<1, \tag{2}$$

с краевыми условиями $\psi=\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=0,$ при

$$x=0,1. \tag{3}$$

Для аппроксимации уравнений (1–2) в сеточной области $\overline{D}_h=\left\{x_k=kh,\ k=\overline{0,N}\right\}$ рассмотрим одномерную разностную задачу для несжимаемой жидкости следующего вида

$$\omega_{x\bar{x},k}=f_k, \tag{4}$$

$$\psi_{x\bar{x},k}=\omega_k \qquad k=\overline{1,N-1}, \tag{5}$$

$$\psi_0=\psi_N=0,$$

с краевыми условиями для вихря скорости по формуле Вудса, который имеет второй порядок точности

$$\omega_0+\frac{1}{2}\omega_1=\frac{3}{h}\psi_{x,0},\ \omega_N+\frac{1}{2}\omega_{N-1}=-\frac{3}{h}\psi_{\bar{x},N}. \tag{6}$$

Устойчивость и сходимость разностной задачи. Соотношение (4) умножим на ψ_k, просуммируем по внутренним узлам сетки.

Отсюда, можно получить следующую оценку устойчивости

$$\left\|\psi_{x\bar{x}}\right\|\le c_0\left\|f\right\|_{L_2(D_h)}.$$

Введем обозначения $z_k=\omega_k-\omega$, $\phi_k=\psi_k-\psi$. Здесь ω_k, ψ_k – решения разностной задачи (4)–(6), ω, ψ – решения дифференциальной задачи (1)–(3), вычисленные в узлах сетки D_h.

Для численного решения (4)–(6) рассмотрим явный итерационный алгоритм вида

$$\frac{\omega_k^{n+1}-\omega_k^n}{\tau}=\omega^n_{x\bar{x},k}+f_k, \tag{7}$$

$$\psi^{n+1}_{x\bar{x},k}=\omega_k^{n+1}, \quad k=\overline{1,N-1}, \tag{8}$$

$$\psi_0^{n+1}=\psi_N^{n+1}=0, \qquad \psi_k^0=\psi_0(kh), \qquad k=\overline{0,N}, \tag{9}$$

$$\omega_N^{n+1} + \frac{1}{2}\omega_{N-1}^{n+1} = -\frac{3}{h}\psi_{\bar{x},N}^{n+1}. \tag{10}$$

Введем обозначения $z_k^n = \omega_k^n - \omega_k$, $\phi_k^n = \psi_k^n - \psi_k$. Здесь ω_k^n, ψ_k^n – решения итерационной схемы (7)–(10), ω_k, ψ_k – решения разностной задачи (4)–(6).

Тогда для погрешности итерации имеем следующие соотношения

$$\frac{z_k^{n+1} - z_k^n}{\tau} = z_{\bar{x}x,k}^n, \tag{11}$$

$$\phi_{\bar{x}x,k}^{n+1} = z_k^{n+1}, \quad k = \overline{1, N-1}, \tag{12}$$

$$\phi_0^{n+1} = \phi_N^{n+1} = 0, \tag{13}$$

$$z_0^{n+1} + \frac{1}{2}z_1^{n+1} = \frac{3}{h}\phi_{x,0}^{n+1}, \quad z_N^{n+1} + \frac{1}{2}z_{N-1}^{n+1} = -\frac{3}{h}\phi_{\bar{x},N}^{n+1}. \tag{14}$$

Соотношение (11) умножим на $2\tau\phi^{n+1}$ и просуммируем по узлам сетки D_h. В результате можно получить следующее энергетическое тождество:

$$\left\|\phi_{\bar{x}}^{n+1}\right\|^2 - \left\|\phi_{\bar{x}}^n\right\|^2 + \left\|\phi_{\bar{x}}^{n+1} - \phi_{\bar{x}}^n\right\|^2 + 2\tau\left(z_0^n\phi_{x,0}^{n+1} - z_N^n\phi_{\bar{x},N}^{n+1}\right) + 2\tau\left(\phi_{\bar{x}x}^n, \phi_{\bar{x}x}^{n+1}\right) = 0.$$

Далее, для разностной задачи (4)–(6) рассмотрим итерационный алгоритм следующего вида

$$\frac{\omega_k^{n+1} - \omega_k^n}{\tau} = \omega_{\bar{x}x,k}^{n+1} + f_k, \tag{15}$$

$$\psi_{\bar{x}x,k}^{n+1} = \omega_k^{n+1}, \quad k = \overline{1, N-1}, \tag{16}$$

$$\psi_0^{n+1} = \psi_N^{n+1} = 0, \quad \psi_k^0 = \psi_0(kh), \quad k = \overline{0, N}, \tag{17}$$

$$\omega_N^{n+1} + \frac{1}{2}\omega_{N-1}^{n+1} = -\frac{3}{h}\psi_{\bar{x},N}^n \tag{18}$$

Для погрешности итерации имеем следующие соотношения

$$\frac{z_k^{n+1} - z_k^n}{\tau} = z_{\bar{x}x,k}^{n+1}, \tag{19}$$

$$\varphi_{\bar{x}x,k}^{n+1} = z_k^{n+1}, \quad k = \overline{1, N-1}, \tag{20}$$

$$\varphi_0^{n+1} = \varphi_N^{n+1} = 0, \; z_0^{n+1} + \frac{1}{2}z_1^{n+1} = \frac{3}{h}\varphi_{x,0}^n,$$

$$z_N^{n+1} + \frac{1}{2} z_{N-1}^{n+1} = -\frac{3}{h} \varphi_{\bar{x},N}^{n} . \qquad (21)$$

При выполнении условия $1 - \frac{2\tau}{h^2} \geq 0$, (22)

имеем

$$\left\|\varphi_{\bar{x}}^{n+1}\right\|^2 - \left\|\varphi_{\bar{x}}^{n}\right\|^2 + \frac{11\tau\delta_0}{6}\left\|\varphi_{\bar{x}}^{n+1}\right\|^2 \leq 0, \left\|\varphi_{\bar{x}}^{n+1}\right\|^2 \leq q\left\|\varphi_{\bar{x}}^{n}\right\|^2,$$

где

$$q = \frac{1}{1 + \frac{11\tau\delta_0}{6}} < 1, \qquad (23)$$

т.е. при выполнении условия (22) итерации алгоритма (15)–(18) сходится к решению (4)–(6) со скоростью геометрической прогрессии и

$$n_0(\varepsilon) \approx o\left(\frac{1}{h^2}\right) \ln \frac{1}{\varepsilon} .$$

Библиографический список

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М. : Мир, 1980. – 616 с.

2. Данаев Н.Т., Смагулов Ш. Об одной методике численного решения уравнений Навье-Стокса в переменных (ψ,ω) // Моделирование в механике. – 1991. –5(22):4. – С. 38–47.

3. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. – Иркутск : Изд. Иркут. ун-та, 1990. – 228 с.

4. Воеводин А.Ф. Об устойчивости разностных граничных условий для функции вихря на твердой стенке // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1998. – №38:5. – С. 855–859.

5. Воеводин А.Ф. Устойчивость и реализация неявных схем для уравнений Стокса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1993. – №33:1. – С. 119–130.

6. Danaev N., Amenova F. About one Method to Solve Navier-Stokes in Variables (Ψ,Ω) // Advances in Mathematical and Computational Methods, 3:2, (2013), 72–78.

7. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М. : Наука, 1977.