УДК 517.95 + 532.582

Свободные и вынужденные волны в канале, покрытом битым льдом

К.А. Шишмарев, К.Н. Завьялова
АлтГУ, г. Барнаул

1. Постановка задачи

Во многих прикладных задачах, учитывающих взаимодействие ледового покрова и жидкости, возникает необходимость изучения свободных и вынужденных волновых колебаний жидкости. Поверхность жидкости может рассматриваться как классическая свободная поверхность, инертная поверхность (ненулевая масса поверхности) или упругая поверхность (ненулевые масса и жесткость поверхности). Исследования задач волнового движения жидкости, покрытой тонкой упругой пластиной, имеет практическое значение для природных (ледовый покров) и искусственных (плавающие аэропорты) структур [1–4]. Основными искомыми характеристиками прогрессивных волн являются зависимость частоты волны от волнового числа и скорости распространения волн в пространстве.

Рассматривается безвихревое течение идеальной жидкости с плотностью ρ_l в канале. Канал имеет прямоугольное сечение с шириной $2L$, $(-L < y < L)$, и высотой H, $(-H < z < 0)$, вдоль оси x канал считается неограниченным, (x, y, z) – декартова система координат. Жидкость в канале покрыта битым льдом. Потенциал скорости течения $\varphi(x, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в области течения

$$\Delta\varphi(x, y, z, t) = 0 \qquad (-\infty < x < \infty, -L < y < L, -H < z < 0) \qquad (9)$$

и условиям непротекания на стенках канала

$$\varphi_z = 0 \qquad (z = -H), \qquad \varphi_y = 0 \qquad (y = \pm L). \qquad (10)$$

В общем случае, вертикальное отклонение поверхности жидкости $w(x, z, t)$ удовлетворяет следующим линеаризованным кинематическому и динамическому условиям [5]

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \ (z = 0), \qquad D\Delta^2\omega + Q\Delta\omega + \rho_\ell\frac{\partial\varphi}{\partial t} + g\rho_\ell\omega = 0 \ (z = 0), \quad (11)$$

где $D = Eh_1^3/[12(1-\nu^2)]$ – жесткость пластины; $M = \rho_i h_i$ – единица массы на единицу площади; $\Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; g – ускорение свободного падения; E – модуль Юнга; Q – поперечное напряжение, (сжатие при

$Q > 0$, растяжение при $Q < 0$), и ν, ρ_i, h_i являются коэффициентами Пуассона, плотности и толщины упругой пластины соответственно.

Решение задачи (1)–(3) будем искать в виде распространяющихся волн [3, 6]

$$w(x, y, t) = Re\{AF(y)e^{i(kx-\omega t)}\}$$

$$\varphi(x, y, z, t) = -Re\{i\omega A\Phi(y, z)e^{i(kx-\omega t)}\}, \qquad (12)$$

где A – амплитуда волны; k – волновое число; $\omega(k)$ – частота волны; $F(y)$ – профиль колебаний поверхности; $\Phi(y, z)$ – комплекснозначный потенциал, удовлетворяющий уравнению Гельмгольца в сечении канала.

Подставляя (4) в систему (1)–(3), получим систему уравнений для определения $\omega(k)$, $F(y)$ и $\Phi(y, z)$

$$-\omega^2 MF(y) = \omega^2 \rho_\ell \Phi(y, 0) - \rho_\ell gF(y), \qquad (13)$$

$$\Delta\Phi(y, z) = k^2\Phi(y, z) \qquad (-L < y < L, -H \le z \le 0), \qquad (14)$$

$$F(y) = \Phi_z \ (z = 0), \quad \Phi_z = 0 \ (z = -H), \quad \Phi_y = 0 \ (y = \pm L). \qquad (15)$$

Для исследования вынужденных колебаний, в динамическое условие (3) необходимо добавить слагаемое, связанное с внешней нагрузкой, затем вместо рассмотрения частных решений в виде (4) нужно использовать методы интегральных преобразований для системы (1)–(3) [3].

2. Алгоритм решения

Функцию $F(y)$ будем искать в виде разложения на функции колебаний поверхности жидкости поперек канала

$$F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(y), \qquad (16)$$

где a_n – коэффициенты разложения, $f_n(y)$ является решением следующей краевой задачи

$$f_{n,yy}(y) = -\lambda_n^2 f_n(y), \qquad f_{n,y} = 0 \ (y = \pm L).$$

Функцию $\Phi(y, z)$ будем искать из уравнения (6) методом разделения переменных. Пусть $\Phi = Y(y)Z(z)$, тогда для Y имеем

$$Y_{yy} + \mu Y = 0, \qquad Y_y = 0 \ (y = \pm L).$$

Откуда получим представление для $Y(y)$

$$Y_n(y) = C_n \cos(\sqrt{\mu_n} y) + S_n \sin(\sqrt{\mu_n} y),$$

где Y_n определяется из краевых условий $Y_y(\pm L) = 0$. Заметим, что решением для Y_n могут быть четные или нечетные функции. Рассмотрим случай четности $Y_n(y)$. В этом случае для $Y_n(y)$ и $f_n(y)$ получим следующие формулы

$$Y_n(y) = C_n\cos(\sqrt{\mu_n}y), \qquad f_n(y) = \cos(\lambda_n y), \qquad \mu_n = \lambda_n^2 = \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2.$$

Для определения $Z(z)$ получим следующую задачу

$$Z_{zz}(z) + (-\mu_n - k^2)Z(z) = 0, \qquad Z_z(-H) = 0,$$

откуда получим формулу для вычисления Z

$$Z_n = B_n e^{2\sqrt{\mu_n+k^2}H} e^{\sqrt{\mu_n+k^2}z} + B_n e^{-\sqrt{\mu_n+k^2}z}.$$

Подставляя полученные формулы для Y_n и Z_n в уравнение для $\Phi(y,z)$, получим

$$\Phi(y,z) = \sum_n D_n\cos(\sqrt{\mu_n}y) e^{\sqrt{\mu_n+k^2}H}\cosh\left(\sqrt{\mu_n+k^2}(H+z)\right),$$

$D_n = C_n B_n$.

Привлекая кинематическое условие (7), и находя константу D_n, после простых преобразований в итоге получим представление для Ф

$$\Phi(y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\cos(\sqrt{\mu_n}y)\cosh\left(\sqrt{\mu_n+k^2}(H+z)\right)}{\sqrt{\mu_n+k^2}\sinh\left(\sqrt{\mu_n+k^2}H\right)}. \tag{17}$$

Последовательно подставляя (8) и (9) в уравнение (5), домножая на $\cos(\sqrt{\mu_n}y)$ и интегрируя по y от $-L$ до L, выводим зависимость для $\omega(k)$

$$\omega_n(k) = \sqrt{\frac{\rho_\ell g M\sqrt{\mu_n+k^2}}{M\sqrt{\mu_n+k^2} + \rho_\ell\coth(\sqrt{\mu_n+k^2}H)}}.$$

Заметим из последней формулы, что для зависимости между волновым числом и частотой волны будет счетное число соотношений, соответствующих разным профилям колебаний поперек канала. Это верно как для четных, рассмотренных в данной статье, колебаний, так и для нечетных.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ «Гидроупругие и термодинамические эффекты при взаимодействии пороупругого снежно-ледового покрова с конструкциями», №16-08-00291, «Расчет физических характеристик почвогрунтов в процессе внутренней эрозии и прогноз их разрушения» №17-41-220314.

Библиографический список

1. Squire V., Hosking R., Kerr A., Langhorne P. Moving loads on ice plates. Kluwer Academic Publishers; 1996.

2. Коробкин А.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Поведение ледового покрова канала под действием поверхностных волн // Известия АлтГУ. – 2012. – №1/1. – С. 55–59.

3. Batyaev E.A., Khabakhpasheva T.I. Hydroelastic waves in channel with free ice cover. Fluid Dynamics 2015;6:84-101.

4. Shishmarev K., Khabakhpasheva T., Korobkin A. The response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Applied Ocean Research 59 (2016) 313–326.

5. Sturova I.V. Unsteady three – dimensional sources in deep water with an elastic cover and their applications // J. Fluid Mech. (2013), vol. 730, p. 26.

6. Korobkin A.A., Khabakhpasheva T.I., Papin A.A. Waves propagating along a channel with ice cover. Eur J Mech B/Fluids 2014;47:166-75.