УДК 51:37

О средствах активизации работы студентов I курса на занятиях по математическому анализу

А.Н. Саженков, Т.В. Саженкова
АлтГУ, г. Барнаул

Успешность освоения математической дисциплины, как в прочем и любой другой, существенно зависит от заинтересованности обучаемых, что может быть достигнуто разумным сочетанием геометрической и физической наглядности математических понятий, простоты и сложности предлагаемых для решения задач, их прикладного характера [1–2].

Традиционные подборки задач по классическим разделам математического анализа бывает полезно дополнить для занятий со студентами, проявляющими интерес к математике, так называемыми олимпиадными задачами. Эти задачи позволяют оживить учебный процесс, вызвать интерес к теме своей оригинальностью и красотой, неожиданностью своей постановки и способа решения традиционным методом.

Циклы таких задач могут быть почерпнуты из специальной литературы по олимпиадной математической тематике. В определённой мере они представлены в ранее изданных учебных пособиях авторов данной статьи [3–5].

Задачи, предлагаемые студентам на занятиях, желательно ранжировать по уровню сложности между собой. Необходимо наличие как совсем простых задач, которые позволяют начать знакомство с тематикой занятий, так и более сложных задач, которые могут быть полезны и как дополнительный материал при подготовке к математическим олимпиадам. Некоторые задачи могут быть предложены в качестве индивидуальных заданий. Такой подход к уровням сложности совсем не случаен, поскольку, как правило, в группе всегда находятся как студенты, которые быстро уходят вперед, так и те, кто притормаживает. Занятие тогда хорошо, когда для всех есть посильное дело.

Поскольку преследуется цель выбора задач для использования их на аудиторных занятиях, время которых весьма ограничено, то задачи должны быть достаточно изящными и лаконичными в решении. К тому же, опыт общения со студентами показывает, что наиболее продуктивна работа над теми задачами, решение которых доступно, по возможности короткое, а для продвинутых студентов самое главное – неожиданное.

Работа над задачами занятия по рассматриваемой тематике должна служить развитию у студентов логического мышления. То есть каждая предлагаемая задача должна требовать получения некоего результата со своим дополнительным штрихом (способом), по отношению к ранее решённым задачам. Иногда это просто эскиз рисунка, а иногда достаточно глубокие рассуждения. Главная идея всей работы над задачами – получение убедительно обоснованного решения. Знакомство студентов с этими приёмами служит расширению у них запаса математических идей и методов решения интересных задач.

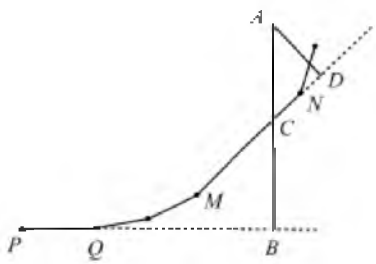
Представим далее некоторое количество предлагаемых задач и их решений.

Принцип крайнего или экстремальной величины

Пример 1. На прямой задано множество точек. При этом каждая точка этого множества является серединой отрезка двух каких-то других точек этого множества. Докажите, что множество – бесконечное.

Предположим, что множество конечное. Рассмотрим крайнюю справа точку этого множества. Эта точка является серединой отрезка двух каких-то других точек этого множества, но тогда один из концов этого отрезка правее рассматриваемой точки и является элементом множества. Противоречие.

Пример 2. Из точки внутри выпуклого многоугольника опускают перпендикуляры на его стороны или их продолжения. Докажите, что хотя бы один перпендикуляр попадёт на сторону.

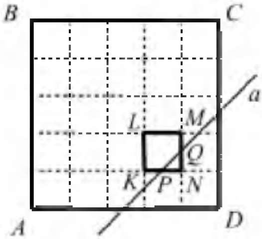


Среди всех перпендикуляров, опущенных из точки A на стороны многоугольника, выберем наименьшей длины AB. Заметим, что он искомый. Допустим, что это не так. Тогда этот перпендикуляр попадает не на сторону PQ этого многоугольника, а на ее продолжение. При этом AB пересечет другую сторону MN в некоторой точке C. Рассмотрим перпендикуляр AD, опущенный на сторону MN или ее продолжение. Поскольку $AB < AC < AD$ получаем противоречие с минимальностью длины выбранного перпендикуляра.

Замечание. В примере 2 сработал метод минимального контрпримера: допустили, что утверждение задачи неверно. Выбрали минимальный в некотором смысле пример. И оказалось, что его можно ещё уменьшить, значит, получили контрпример, а с ним искомое противоречие.

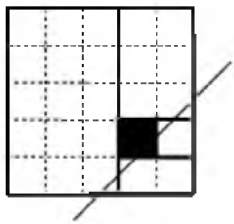
Конечное и бесконечное

Пример 3. За дядькой Черномором выстроилось чередой бесконечное число богатырей. Докажите, что он может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечно много богатырей, и все они стояли по росту (не обязательно в порядке убывания роста).



Выберем из шеренги богатыря a_1 минимального роста. Из богатырей, стоящих за богатырем a_1 снова выберем богатыря минимального роста – a_2 (ясно, что он не ниже богатыря a_1). Далее, снова выберем богатыря a_3 минимального роста из стоящих за a_2. (он не ниже богатыря a_2) Если описанный процесс смог начаться и не оборвался, то выделено бесконечно много богатырей, рост которых не убывает. В противном случае (для каждого богатыря есть богатырь ниже его роста, стоящий за ним) легко выделить бесконечно много богатырей, рост которых не возрастает.

Пример 4. Можно ли покрыть бесконечную плоскость паркетом из прямоугольников так, что все эти прямоугольники можно было разрезать одним прямолинейным разрезом?



Рассмотрим квадрат $ABCD$ размером 5×5 и внутри него квадрат $KLMN$ размером 1×1. Пусть прямая a проходит через середины сторон MN и NK квадрата $KLMN$. Нетрудно заметить, что тогда она проходит через середины сторон квадрата $ABCD$. Теперь покажем как будем строить паркет из прямоугольников. Пусть начальной плиткой является квадрат 1×1 и прямая, проходящая через середины соседних сторон квадрата (для определенности нижнюю и правую). Допустим, что нами построен квадрат $n \times n$, который разбит на прямоугольники, каждый из которых попадает под разрез прямой, проходящей через середины соседних сторон квадрата. Надстроим над ним квадрат $5n \times 5n$ так же как квадрат $ABCD$ надстроен над квадратом $KLMN$. Сформируем прямоугольники как показано на рисунке. В результате такого процесса произойдет замощение всей плоскости.

Математическая индукция

Пример 5. Кусок бумаги разрешается рвать на 4 или на 6 кусков. Докажите, что по этим правилам его можно разорвать на любое число кусков, начиная с девяти.

Заметим, что если кусок бумаги рвется на 4 куска, то количество кусков увеличивается на 3, а если кусок бумаги рвется на 6 кусков, то – увеличивается на 5. Докажем индукцией по n, что по этим правилам кусок бумаги можно разорвать на n кусков, начиная с девяти. *Индукционный шаг.* Если кусок можно разорвать на n кусков, то его можно разорвать и на $n + 3$. *База индукции.* Покажем, как получить 9, 10 и 11 кусков: $9 = 1 + 3 + 5$, $10 = 1 + 3 + 3 + 3$, $11 = 1 + 5 + 5$.

Пример 6. (Игра «Ханойская башня») Имеется пирамида с n кольцами возрастающих размеров и еще два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что *a*) можно переложить все кольца с первого стержня на один из пустых стержней; *b*) это можно сделать за $2^n - 1$ перекладывание.

Решение (для обоих пунктов)**.** Индукция по n.

База: $n = 1$. Одно кольцо очевидно перекладывается за 1 ход.

Индукционный переход: пусть мы умеем перекладывать n колец за $2^n - 1$ ход (*индукционное предположение*). Теперь рассмотрим пирамиду с $n + 1$ кольцом. Рассматривая пирамиду без нижнего (большого) кольца, как пирамиду из n колец, переложим ее за $2^n - 1$ ход (это мы можем по индукционному предположению). Теперь большое кольцо переложим на пустой стержень (ещё один ход). И, наконец, переложим пирамиду из n колец на большое кольцо. На всё потребуется $2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$ ход.

Библиографический список

1. Плотникова Е.А., Саженкова Т.В. О преемственности в преподавании математических дисциплин // Сборник научных статей международной школы-семинара «Ломоносовские чтения на Алтае». – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2013.

2. Плотникова Е.А., Саженкова Е.В. О синтезе аналитических и информационно-технологических методов в обучении математике на гуманитарных специальностях // Сборник трудов всероссийской конференции по математике МАК 2016. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2016.

3. Саженков А.Н., Саженкова Т.В. Теоретические и прикладные аспекты решения задач высокого уровня сложности в системе школьного математического образования // Сборник научных статей международной школы-семинара «Ломоносовские чтения на Алтае». – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2014.

4. Саженков А.Н., Саженкова Т.В. Математическое творчество: классические олимпиадные темы и задачи высокого уровня сложности // Сборник научных статей международной школы-семинара «Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования». – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2015.

5. Саженков А.Н., Саженкова Т.В. О некоторых содержательных аспектах воспитания математической культуры у учащихся и студентов // Сборник трудов всероссийской конференции по математике МАК 2016. – Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2016.

УДК 371.3

Обучение чтению по специальности «Математика и компьютерные науки» на основе аудирования профессионально направленной речи

Т.В. Скубневская
АлтГУ, г. Барнаул

Очевидно, что для развития способности к коммуникации в устной речи и письменной формах на русском и иностранном языках (ОК-5) у студентов бакалавриата по направлению подготовки «Математика и компьютерные науки» [1] совершенно необходима работа с языком специальности [2] и текстами по специальности для решения задач будущей профессиональной деятельности, для развития способности к самоорганизации и к самообразованию (ОК-7), а также к самостоятельной научной работе (ОПК-3).

Классической является аксиома Г.В. Роговой о том, что чтение является основным средством пополнения и расширения знаний специалиста, заметим, в какой бы сфере он ни работал. «Чтение будет выполнять свою функцию в том случае, если, во-первых, специалист умеет читать, т.е. пользоваться разными видами чтения, как-то: просмотровым – для определения ценности источника (нужен – не нужен, каков уровень изложения и т.п.); поисковым для нахождения ответа на возникший у него вопрос; детальным или изучающим – в целях обогащения своих знаний, знакомства с автором, его концепцией, с идеями, которые он развивает. Во-вторых, если специалист умеет читать быстро, что связано с 1) овладением приемами разного вида чтения, 2) знанием структурно-смысловой организацией текста, 3) его композиции (они же разные в зависимости от характера источника). В-третьих, если специалист умеет извлекать информацию из читаемого текста в виде фактов, идей, изложенных в нем, а также умеет находить воз-