МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФГБОУ ВПО "АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"
Факультет математики и информационных технологий
Кафедра алгебры и математической логики

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ

Барнаул
Издательство
Алтайского государственного
университета
2016

Составитель:
канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель ***А.Н. Федорова***
Рецензент:
канд. физ.-мат. наук, доцент ***Е.В. Журавлев***

Учебно-методическое пособие содержит достаточное количество задач, чтобы обеспечить и практические, и домашние задания по теме «Теория графов» курса «Дискретная математика». Кроме того, кратко приведены необходимые теоретические сведения.

Предназначено для студентов факультета математики и информационных технологий.

План УМД 2016 г., п. 48

Подписано в печать 02.11.2016. Формат 60х84/16
Усл.-печ. л. 1. Тираж 50 экз. Заказ № 253
Типография Алтайского государственного университета:
656099, Барнаул, ул. Димитрова, 66

§1 Основные определения

Если задано некоторое множество V и множество E пар различных элементов из V ($E \subseteq V^2$), то элементы множества V называются *вершинами*, а элементы множества E - *ребрами*, а пара $G = (V, E)$ называется *графом*. *Степень вершины* v ($d(v)$) - это количество ребер, выходящих из вершины v. Вершины называются *смежными*, если их соединяет ребро. Если $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ - графы, то они называются *изоморфными* ($G \simeq G'$), если существует биекция $\varphi : V \to V'$, где $xy \in E \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E'$ для всех $x, y \in V$. Отображение φ называется *изоморфизмом*, причем, если $G = G'$, то *автоморфизмом*. Граф называется *однородным*, если все его вершины имеют одинаковую степень. Однородный граф, каждая вершина которого имеет степень 3, называется *кубическим*. $G = (V, E)$ называется *двудольным*, если V допускает такое разбиение $V = V_1 \cup V_2$ ($V_1 \cap V_2 = \varnothing$), при котором концы каждого ребра лежат в разных классах, вершины из одного класса разбиения должны быть попарно несмежны. *Дополнением* $\overline{G}$ к G называется граф на том же множестве вершин V с множеством ребер $V^2 \setminus E$. Граф называется *самодополнительным*, если он изоморфен своему дополнению.

1. В графе G 7 вершин v_i ($i = \overline{1,7}$) и $d(v_1) = 6$, $d(v_2) = 5$, $d(v_3) = d(v_4) = 3$, $d(v_5) = d(v_6) = 2$, $d(v_7) = 1$. Какие вершины смежны с v_3?

2. В графе G 5 вершин v_i ($i = \overline{1,5}$), причем $d(v_1) = d(v_2)$, а степени остальных вершин различны и не совпадают с $d(v_1)$. Найти $d(v_1)$.

3. Вычислить количество ребер графа K_n.

4. Может ли существовать граф с 15 вершинами, степень каждой из которых равна 5?

5. Чемпионат по футболу проводился по круговой системе. За победу в матче давалось два очка, за ничью - 1, за поражение - 0 очков. Если две команды набирали одинаковое количество очков, место определялось по разности забитых и пропущенных мячей. Чемпион набрал 7 очков, второй призер - 5, третий - 3. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место?

6. В графе G 20 вершин, каждая из которых имеет степень 8. Доказать, что найдутся три вершины, между любыми двумя из которых нет ребра.

7. Доказать, что для любого графа $\sum_{v \in \in V} d(v) = 2 \mid E \mid$.

8. Пусть $n_i(G)$ - число вершин степени i в графе G. Построить все попарно неизоморфные графы, у которых:
1) $n_2(G) = 1$, $n_3(G) = n_4(G) = 2$ и $n_i(G) = 0$ при $i \neq 2, 3, 4$.
2) $n_2(G) = 3$, $n_3(G) = 2$, $n_4(G) = 1$ и $n_i(G) = 0$ при $i \neq 2, 3, 4$.

9. Изобразить все попарно неизоморфные графы с 4 вершинами.

10. Сколько существует попарно неизоморфных графов с 6 вершинами со следующим набором степеней вершин: (2,2,3,3,3,5)?

11. Сколько существует попарно неизоморфных кубических графов с 6 вершинами? Есть ли среди них двудольные графы?

12. Существует ли граф с 6 вершинами, имеющий такой набор степеней вершин: (2,2,2,4,5,5)?

13. Показать, что в любом графе, содержащем не менее двух вершин, найдутся 2 вершины с одинаковыми степенями.

14. Доказать, что количество вершин нечетной степени в любом графе четно.

15. Может ли быть 100 ребер в кубическом графе?

§2 Пути и циклы

Путь – это непустой граф $P = (V, E)$ вида

$$V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}, \quad E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\},$$

где все x_i различны. Вершины x_0 и x_k *соединены* путем P и называются его *концами*; $x_1, \dots, x_{k-1}$ - *внутренние* вершины пути P. Число ребер в пути есть его *длина*. Если $P = x_0 \dots x_{k-1}$ - путь и $k \geq 3$, то граф $C = P + x_{k-1}x_0$ называется *циклом*. *Длина* цикла есть число его ребер (или вершин). *Маршрут* (*длины* k) в графе G есть непустая чередующаяся последовательность $v_o e_0 v_1 e_1 \dots e_{k-1} v_k$ вершин и ребер в G такая, что $e_i = v_i v_{i+1}$ при всех $i < k$. Если $v_0 = v_k$, то маршрут *замкнут*. Наибольшее расстояние между двумя вершинами в G есть *диаметр* графа G, обозначаемый $D(G)$. Вершина *центральна* в G, если наибольшее расстояние от нее до всех остальных вершин минимально. Это расстояние есть *радиус* графа G, обозначаемый $R(G)$.

1. Доказать, что любой замкнутый маршрут нечетной длины $l \geq 3$ содержит цикл. Справедливо ли аналогичное утверждение для маршрутов четной длины?

2. Доказать, что если в графе степень каждой вершины больше 1, то в нем есть цикл.

3. В графе G для любой вершины v выполняется неравенство $d(v) \geq |V|/2$. Доказать, что в графе есть цикл длины 4.

4. Доказать, что если $|V(G)| = 6$, то либо G, либо $\overline{G}$ содержит цикл длины 3.

5. В графе с 5 вершинами среди любых 3 вершин найдутся 2, соединенные ребром, и 2, не соединенные ребром. Доказать, что в графе есть цикл длины 5.

6. В графе G среди любых 3 вершин найдутся 2, соединенные ребром. Доказать, что в графе есть цикл длины 3.

7. В графе K_{17} каждое из ребер покрашено в один из трех цветов. Доказать, что в этом графе найдется одноцветный треугольник.

8. В графе G вершина v имеет степень 21, вершина w имеет степень 1, а каждая из остальных вершин имеет степень 12. Доказать, что существует путь, соединяющий v и w.

9. Каково число автоморфизмов графа, являющегося циклом длины p?

§3 Связность

Непустой граф G называется *связным*, если любые две его вершины соединены путем в G. Вершина называется *изолированной*, если она не инцидентна ни одному ребру. Максимальный связный подграф графа G называется *компонентой связности* G. Для множеств вершин A, B назовем $P = x_0 \dots x_k$ A–B *путем*, если $V(P) \cap A = \{x_0\}$ и $V(P) \cap B = \{x_k\}$. Если $A, B \subseteq V$ и $X \subseteq V \cup E$ таковы, что каждый $A - B$ путь в G содержит вершину или ребро из X, мы говорим, что X *разделяет* множества A и B в G.

1. Доказать, что граф с 53 вершинами, каждая из которых имеет степень не менее 26, связен.

2. Доказать, что граф с 45 вершинами и 950 ребрами связен.

3. Построить все попарно неизоморфные несвязные графы с 5 вершинами, не имеющие изолированных вершин.

4. Построить все попарно неизоморфные несвязные графы с 6 вершинами, состоящие: 1) из 4 компонент; 2) из 3 компонент; 3) из одной компоненты и имеющие 7 ребер и 2 вершины степени 1.

5. Выяснить, какие наборы степеней вершин могут быть у связных графов с 6 вершинами, имеющих 7 ребер и содержащих вершину степени 2 и вершину степени 3. Для каждого допустимого набора степеней вершин построить пример соответствующего графа.

6. Доказать, что для всякого $n \geq 3$ существует связный граф с n вершинами, содержащий $n-1$ вершин с неравными друг другу степенями.

7. Пусть $\delta(G)$ - наименьшая из степеней вершин графа G, содержащего n вершин ($n \geq 2$).
1) Доказать, что если $\delta(G) \geq (n-1)/2$, то граф связен. 2) Показать, что в предыдущем утверждении заменить $(n-1)/2$ на $[(n-1)/2]$ нельзя.

8. Индукцией по n доказать, что связный граф с n вершинами содержит не менее $n-1$ ребер ($n \geq 1$).

9. Какое наибольшее количество разрезов можно сделать в волейбольной сетке (5×10) так, чтобы она не распалась?

10. Доказать, что если из связного графа удалить произвольное ребро, содержащееся в некотором цикле, то новый граф будет также связным.

11. Доказать, что в связном графе любые два пути максимальной длины имеют хотя бы одну общую вершину. Верно ли, что у них всегда есть общее ребро?

12. Доказать, что любой связный граф, имеющий не менее двух вершин, содержит вершину, не являющуюся разделяющей.

13. Пусть G - произвольный граф, а $\overline{G}$ - его дополнение. Доказать, что:

1) хотя бы один из графов G, $\overline{G}$ связен;

2) Если в G более 4 вершин, то хотя бы в одном из графов G, $\overline{G}$ имеется цикл;

3) Если граф G несвязен или его диаметр не меньше 3, то диаметр графа $\overline{G}$ не больше 3;

4) Если v - разделяющая вершина графа G, то она не является разделяющей в графе $\overline{G}$.

14. 1) Показать, что если граф самодополнительный, то число вершин в нем равно либо $4l$ $(l \geq 1)$, либо $4l + 1$ $(l \geq 0)$.

2) Доказать, что среди графов с 4 вершинами самодополнительным является только один, а среди графов с 5 вершинами только два.

3) Показать, что самодополнительный граф связен.

4) Доказать, что диаметр самодополнительного нетривиального графа G удовлетворяет неравенствам $2 \leq D(G) \leq 3$.

15. Выяснить, сколько существует попарно неизоморфных графов, имеющих: 1) 6 вершин и 11 ребер; 2) 7 вершин и 18 ребер; 3) 8 вершин и 24 ребра; 4) 6 вершин, 7 ребер и 2 компоненты связности; 5) 8 вершин и удовлетворяющих следующему условию: сумма степеней всех вершин не меньше 53.

16. Пусть у графа n вершин и s компонент связности. Доказать, что число ребер в нем не меньше, чем $n - s$ и не превосходит $(n - s)(n - s + 1)/2$. Вывести отсюда, что если у графа с n вершинами ($n \geq 2$) число ребер больше $(n - 2)(n - 1)/2$, то он связный.

17. Показать, что если в графе с n вершинами нет циклов нечетной длины и число ребер больше $((n-1)/2)^2$, то граф связен ($n \geq 2$).

18. Доказать, что из связного графа можно удалить вершину так, что его связность не нарушится.

§4 Эйлеровы графы

Замкнутый маршрут называется *эйлеровым обходом*, если он проходит каждое ребро графа ровно один раз. Граф *эйлеров*, если он допускает эйлеров обход.

1. Доказать, что если в графе имеется ровно две вершины нечетной степени, то существует путь, соединяющий их.

2. Из какого минимального числа кусков проволоки можно спаять каркас куба? (Толщина всех ребер каркаса должна быть одинаковой).

§5 Гамильтоновы графы

Цикл называется *гамильтоновым*, если он проходит через каждую вершину графа. Граф *гамильтонов*, если в нем есть гамильтонов цикл.

1. Доказать, что если в графе G степень каждой вершины удовлетворяет неравенству $d(v) \geq |V|/2$, то G - гамильтонов граф.

2. Доказать, что в графе Петерсена нет гамильтонова цикла, но в графе, полученном из него удалением одной вершины, имеется гамильтонов цикл.

3. Доказать, что в каждом из графов K_n, $K_{n,n}$, B^n имеется гамильтонов цикл.

4. Доказать, что если для любых двух вершин u и v связного графа с n вершинами выполняется неравенство $d(u)+d(v) \geq n$, то граф содержит гамильтонов цикл.

5. Доказать, что любой граф с n вершинами, имеющий не менее $C_{n-1}^2 + 2$ ребер, содержит гамильтонов цикл.

6. Показать, что граф, у которого имеются две несмежные вершины третьей степени, а остальные вершины имеют степень, не большую, чем 2, не обладает гамильтоновым циклом.

7. Показать, что граф K_{2n+1} можно представить в виде объединения n гамильтоновых циклов.

8. Найти такую последовательность ходов шахматного коня, чтобы, начав с произвольной клетки, пройти через каждую клетку шахматной доски один раз и вернуться в исходную.

§6 Деревья

Ациклический граф, то есть не содержащий циклов, называется *лесом.* Связный лес называется *деревом.*

1. Пусть G - граф с $n \geq 2$ вершинами. Доказать эквивалентность следующих утверждений:

1) G - связный граф с $n-1$ ребрами;

2) G - минимальный связный граф;

3) любая пара различных вершин в графе G соединена единственным путем; 4) G - максимальный ациклический граф.

2. Доказать, что во всяком дереве с $n \geq 2$ вершинами содержится не менее двух вершин степени 1.

3. Пусть n_1 - число вершин степени 1 у дерева с n вершинами, не содержащего вершин степени 2. Доказать, что $n_1 \geq n/2 + 1$.

4. 1) Индукцией по n доказать, что каждое дерево с $n \geq 2$ вершинами является двудольным графом.

2) Какие деревья являются полными двудольными графами?

5. У дерева T 26 вершин. Их них одна имеет степень 5, остальные - степень 3 или 1. Сколько у этого дерева вершин степени 3?

6. Изобразить все попарно неизоморфные деревья:

1) с 6 ребрами и 3 вершинами степени 1; 2) с 6 ребрами и 4 вершинами степени 1; 3) с 7 ребрами и 3 вершинами степени 1; 4) с 8 ребрами и 3 вершинами степени 3.

7. Описать все графы, являющиеся деревьями вместе со своими дополнениями.

8. 1)Доказать, что радиус $R(G)$ и диаметр $D(G)$ графа G связаны неравенствами $R(G) \leq D(G) \leq 2R(G)$.

2) Показать, что обе оценки достижимы.

3) Доказать, что если G - дерево, то $R(G) =]\frac{D(G)}{2}[$.

4) Доказать, что всякий центр дерева принадлежит каждому

его диаметральному пути.

5) Доказать, что дерево обладает единственным центром в случае, когда его диаметр - число четное, и обладает двумя центрами, когда его диаметр - число нечетное.

9. Показать, что в дереве с нечетным диаметром любые два пути наибольшей длины имеют хотя бы одно общее ребро.

§7 Планарные графы

Фигура $S \subseteq \mathbb{R}^{(3)}$, состоящая из точек $b_1, b_2, \ldots$ и кривых (отрезков) $\{b_i, b_j\}$, их соединяющих, где внутренняя точка любой кривой не является вершиной или внутренней точкой другой кривой, называется *геометрической реализацией графа* $G = (V, E)$, где $V = \{a_1, a_2, \ldots\}$, если существуют биекции

$$V \to \{b_1, b_2, \ldots\}$$

и

$$E \to \{\{b_i, b_j\}\}$$

такие, что $\{a_i, a_j\} \to \{b_{n_i}, b_{n_j}\}$ тогда и только тогда, когда $a_i \to b_{n_i}$, $a_j \to b_{n_j}$ (то есть $S \cong G$). Граф называется *планарным*, если существует его реализация в $\mathbb{R}^{(2)}$ (то есть, если существует изоморфный ему граф, изображенный на плоскости без пересечений ребер).

1. Построить граф с 6 вершинами и 12 ребрами, содержащий одновременно подграфы, гомеоморфные K_5 и $K_{3,3}$.

2. Построить все попарно неизоморфные непланарные графы, содержащие 6 вершин и 11 ребер.

3. Построить однородный граф с 9 вершинами, которые не планарен вместе со своим дополнением.

4. Используя формулу Эйлера доказать непланарность следующих графов: K_5; $K_{3,3}$, граф Петерсена.

5. Выяснить, какое наименьшее число вершин нужно удалить из графа Петерсена, чтобы получился планарный граф.

6. Выяснить, существует ли планарный граф, у которого:
1) 7 вершин и 16 ребер; 2) 8 вершин и 17 ребер.

7. Какое наибольшее число граней может быть у плоского графа с 5 вершинами? Изобразите такой граф.

8. 1) Существует ли плоский граф с 6 вершинами, у которого 9 граней?
2) Построить все попарно неизоморфные плоские графы с 6 вершинами, имеющие 8 граней.

9. Графы G_1 и G_2 плоские, с 6 вершинами, с одинаковым числом граней. У графа G_1 4 вершины степени 4 и 2 вершины степени 3. У графа G_2 2 вершины степени 5, а остальные имеют степени меньше 5. Какие степени могут быть у остальных вершин графа G_2? Изобразите все такие графы G_1 и G_2.

10. Доказать, что в каждом планарном графе есть вершина степени не большей, чем 5.

11. Плоский связный граф без вершин степени 1, каждая грань которого, включая и внешнюю, ограничена циклом длины 3, называется триангуляцией. Показать, что триангуляция с $n \geq 3$ вершинами имеет $3n - 6$ ребер и $2n - 4$ граней.

12. Доказать, что в любом планарном графе, имеющем не менее 4 вершин, найдутся хотя бы 4 вершины, степени которых не больше 5.

13. 1) Показать, что плоский кубический граф, граница каждой грани которого имеет не менее 5 вершин, содержит по крайней мере 20 вершин. Привести пример такого графа.

2) Пусть G - плоский связный кубический граф. Через f_i ($i \geq 3$) обозначим число тех граней графа G, каждая из которых ограничена i ребрами. Доказать, что $\sum_{i \geq 3}(6-i)f_i = 12$.

14. Какое минимальное число ребер нужно удалить из куба B^4, чтобы полученный граф был плоским?

§8 Двудольные графы

1. В двудольном графе G степень каждой вершины равна 3. Доказать, что количество вершин в долях одинаковое.

2. В двудольном графе G для любой вершины $v \in V_1$ выполняется неравенство $d(v) \geq |V_2|$ и для любой вершины $w \in V_2$ выполняется неравенство $d(w) \leq |V_1|$. Доказать, что эти неравенства являются равенствами.

Библиографический список

1. Дистель Р. Теория графов. - Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002.

2. Емеличев В.А. и др. Лекции по теории графов. - М.: Либроком, 2014.

3. Оре О. Теория графов. - М.: Либроком, 2009.

4. Харари Ф. Теория графов. - М.: Ленанд, 2015.

5. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

6. Емеличев В.А. и др. Теория графов в задачах и упражнениях. Более 200 задач с подробными решениями. - М.: Либроком, 2015.