МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Международный институт экономики, менеджмента и
информационных систем
Кафедра международной экономики, математических методов
и бизнес-информатики

МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ И УПРАВЛЕНИИ

Барнаул 2017

УДК 51:33 (075.8)
ББК 22.1 я73+65в631я73
Б 183

Б 183 ***Байкин А.А., Исаева О.В., Поддубнова С.А., Половникова Е.С.*** Математика в экономике и управлении / учебное пособие. – Барнаул: "Новый формат", 2017. – 75 с.

Учебное пособие по дисциплине «Математика в экономике и управлении» предназначено для студентов первого курса дневного и заочного отделения, обучающихся на экономическом факультете (МИЭМИС)

Пособие содержит список рекомендуемой литературы, учебно-методические материалы, задания для проведения практических занятий и индивидуальные лабораторные работы, предназначенные для студентов 1 курса, обучающихся по направлению «Экономика».

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Математика в экономике и управлении» Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования является федеральной компонентой цикла естественнонаучных и математических дисциплин по направлению подготовки 380301.62 «Экономика».

Курс «Математика в экономике и управлении» является фундаментальным курсом, необходимым для овладения теоретическими и практическими знаниями, лежащими в основе общенаучных дисциплин экономического профиля, а также курсов, изучающих конкретные задачи макро- и микроэкономики.

Изучение курса предусматривает проведение лекционных, практических и лабораторных занятий. По каждой теме студент должен подготовить ответы на ряд теоретических вопросов и решить некоторое количество (определяет ведущий преподаватель) упражнений. Если для выполнения упражнения требуются графические построения, то необходимо: подписать координатные оси, выбрать подходящий масштаб по каждой из осей и аккуратно выполнить чертеж.

Данное учебное пособие содержит: список рекомендуемой литературы; задания для проведения семинарских занятий и индивидуальные лабораторные работы, предназначенные для студентов 1 курса, обучающихся по очной форме. Учебный материал курса, соответствующий первому семестру, разбит на темы, изучение которых ориентировано на работу с учебником «Высшая математика» [1].

ЛИТЕРАТУРА, РЕКОМЕНДОВАННАЯ СТУДЕНТАМ

УЧЕБНИКИ И УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ

Основная

1. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика : учебник. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ТК Велби; Проспект, 2004.

2. Кузнецов Б.Т. Математика : учебник. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2004.

3. Высшая математика для экономистов / под ред. Н.Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи, ЮНИТИ, 2000.

Дополнительная

4. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. – М. : Дело, 2000.

5. Малыхин В.И. Математика в экономике : учебное пособие – М. : ИНФРА-М, 2002.

6. Общий курс высшей математики для экономистов : учебник / под ред. В.И. Ермакова. – М. : ИНФРА-М, 2001.

7. Справочник по математике для экономистов / под ред. В.И. Ермакова. – М. : Высшая школа, 1987.

СБОРНИКИ ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ

8. Гурский Е.И., Домашов В.П., Кравцов В.К., Сильванович А.П. Руководство к решению задач по высшей математике. – В 2 ч. – Минск, Вышэйшая школа, 1989.

9. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах : учебное пособие для студентов втузов. – В 2 ч. – М. : Высшая школа, 1999.

10. Руководство к решению задач с экономическим содержанием по курсу высшей математики / под ред. А.И. Карасева, Н.Ш. Кремера. – М.: Изд-во ВЗФЭИ, 1989.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ТЕМ КУРСА

1. Цель курса. Цель преподавания курса – дать современное представление о методах высшей алгебры и математического анализа, применяемых при изучении процессов, протекающих в экономике, финансах, бизнесе и управлении.

2. Задачи курса. Основными задачами являются:

- развитие у студентов логического и аналитического мышления;

- обучение студентов основам алгебры и математического анализа, используемых для решения теоретических и практических задач в области экономики и управления;
- развитие навыков в применении методологии и методов количественного анализа с использованием экономико-математического аппарата и электронно-вычислительной техники.

Раздел 1. Элементы высшей алгебры и аналитической геометрии

Тема 1.1. Матрицы и определители

Литература: [1, с. 47-55; 2, с. 13-21; 4, с. 9-17; 8, т. 1, с. 39-43, 74-80].

Понятие матрицы. Сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число, умножение матрицы на матрицу, транспонирование матрицы, возведение матрицы в натуральную степень и основные свойства операций над матрицами.

Понятие определителя и способы его вычисления. Свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке. Теорема Лапласа. Обратная матрица.

Основные понятия и определения

Прямоугольную таблицу произвольных чисел a_{ij} вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

состоящую из m строк и n столбцов, называют матрицей размера m на n и обозначают $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Числа a_{ij} называют элементами матрицы. Элемент a_{ij} расположен на пересечении i-й строки и j-го столбца. Элементы матрицы a_{ii} $(i = j)$ образуют *главную* диагональ матрицы.

Рассмотрим различные типы матриц.

1. Если $m = 1$, то $(a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n})$ – строка (вектор-строка).

2. Если $n = 1$, то $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ – столбец (вектор- столбец).

3. Если $n = m$, то получаем квадратную матрицу.

4. Если в квадратной матрице $a_{ij}=0$, при $i\neq j$ то имеем диагональную матрицу, т.е.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

5. Если в диагональной матрице на главной диагонали стоят только единицы, то получаем единичную матрицу, т.е. $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Две матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ и $B_{m\times n}=(b_{ij})$ *равны*, если они имеют одинаковые размеры и равны их элементы, стоящие на одинаковых местах (соответствующие элементы):

$$A=B, \text{ если } a_{ij}=b_{ij},\ i=1,\dots m;\ j=1,\dots n.$$

1) *Произведением матрицы* $A_{m\times n}=(a_{ij})$ *на число* α называется матрица $B_{m\times n}=\alpha A=(b_{ij})$ такая, что $b_{ij}=\alpha a_{ij}$, $i=1,\dots m;\ j=1,\dots n.$

2) *Суммой двух матриц* $A_{m\times n}=(a_{ij})$и $B_{m\times n}=(b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n}=A+B=(c_{ij})$ такая, что $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, i=1,\dots m;\ j=1,\dots n.$

Пример 1.1.1. Для матриц $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 8 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ вычислить матрицу $2A-B$.

Решение. Заметим, что операция сложения матриц определена только для матриц одинаковых размеров, при этом соответствующие элементы складываются:

$$2A-B=2A+(-1)\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 6 & 10 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 8 & 5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

3) *Произведением* матрицы $A_{m\times p}=(a_{ij})$ на матрицу $B_{p\times n}=(b_{ij})$ называется матрица

$$C_{m\times n}=A\cdot B=(c_{ij}),\qquad c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{ip}b_{pj},$$
$$i=1,\dots m;\ j=1,\dots n.$$

Из определения следует, что при умножении матрицы A и B должны быть согласованными, т.е. число столбцов первой матрицы должно быть равно числу строк второй матрицы.

Пример 1.1.2. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -1\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}$ вычислить матрицу A^2.

Решение. Так как $D=A^2=A_{3\times3}\cdot A_{3\times3}$, то, очевидно, что матрицы согласованы.

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -1\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -1\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_{11} & d_{12} & d_{13}\\ d_{21} & d_{22} & d_{23}\\ d_{31} & d_{32} & d_{33}\end{pmatrix}.$$

Каждый элемент d_{ij} итоговой матрицы D равен сумме произведений элементов i-ой строки первой матрицы на элементы j-го столбца второй матрицы, т.е.

$$d_{11}=1\cdot1+(-1)\cdot2+1\cdot3=2, \qquad d_{21}=2\cdot1+2\cdot2+(-1)\cdot3=3,$$
$$d_{12}=1\cdot(-1)+(-1)\cdot2+1\cdot0=-3, \qquad d_{22}=2\cdot(-1)+2\cdot2+(-1)\cdot0=2,$$
$$d_{13}=1\cdot1+(-1)\cdot(-1)+1\cdot(-1)=1, \qquad d_{23}=2\cdot1+2\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)=1,$$
$$d_{31}=3\cdot1+0\cdot2+(-1)\cdot3=0,$$
$$d_{32}=3\cdot(-1)+0\cdot2+(-1)\cdot0=-3,$$
$$d_{33}=3\cdot1+0\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)=4.$$

Таким образом, получаем ответ $D=A^2=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & -3 & 4\end{pmatrix}$. ►

Заметим, что в общем случае матрицы не перестановочны, то есть $AB\neq BA$.

4) Переход от матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ к матрице $A^T=(a_{ji})$, в которой строки заменены на столбцы, называется *транспонированием*.

Определителем квадратной матрицы порядка n (или определителем n -го порядка) $A_{n\times n}=A_n=(a_{ij})$ называется число, обозначаемое $|A_n|$ (или $\det A$ или Δ_n) и определяемое по следующим правилам:

$$\Delta_1=|a_{11}|=a_{11}; \qquad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},;$$

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Минором M_{ij} некоторого элемента a_{ij} определителя называется определитель, порядок которого на единицу меньше, и полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма $i+j$ – четное число, и со знаком «минус», если сумма нечетная.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Пример 1.1.3. Вычислить определитель $A_4 = \begin{vmatrix} 30 & -10 & 120 & 80 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix}$.

Решение. По свойству 4 определителей из первой строки вынесем множитель 10, а затем будем последовательно умножать полученную строку на $3; 1; 2$ и складывать со второй, третьей, четвертой строками соответственно. Тогда, согласно свойству 10, получим:

$$A_4 = 10 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 15 & 1 \\ -3 & 0 & 32 & 1 \end{vmatrix}.$$

По свойству 7 определителей полученный определитель можно разложить по элементам второго столбца. Тогда

$$A_4 = 10\big((-1)A_{12} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} + 0A_{42}\big) = 10 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка можно вычислить по правилу Саррюса или свести к вычислению определителя второго порядка, занулив два элемента последнего столбца:

$$A_4 = 10 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \\ -7 & 30 & 0 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 13 \\ -7 & 30 \end{vmatrix} = 10 \cdot 7 \cdot 13 = 910. \ ►$$

Упражнение 1. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}, \ G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 1. Выполните действия: а) $A+2\cdot C$; б) $B\cdot E$; в) $E\cdot H$; г) $A\cdot D$; д) H^2; е) $D\cdot F$; ж) $H\cdot G$; з) $F\cdot G$.

Задание 2. Проверьте справедливость равенств:
а) $AC = CA$; б) $(A+C)B = AB + CB$; в) $B\cdot B^T = B^T\cdot B$ г) $AD = D^T\cdot A$.

Задание 3. Вычислите значение матричного многочлена $f(A) = A^2 - 2A + E^3$.

Задание 4. Вычислите значение матричного многочлена $f(A) = (H+E)^2$.

Задание 5. Вычислите значение матричного многочлена $f(A) = (A-E)^2$.

Задание 6. Вычислите значение матричного многочлена $f(A) = A^2 + 2AC + C^2$.

Задание 7. Вычислите значение матричного многочлена $f(A) = (A+C)^2$.

Задание 8. Вычислите значение матричного многочлена

$$f(A,B,C) = A^2 - 2A\cdot C + B\cdot B^T.$$

Задание 10. Вычислите $\left|A^2\right| - 2|A| + |C|$.

Задание 11. Проверьте справедливость равенства $|A\cdot C| = |A|\cdot|C|$.

Задание 12. Вычислите: а) A_{12}; б) B_{12}; в) C_{12}; г) A_{21}

Упражнение 2. Вычислите определители следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

Тема 1.2. Обратная матрица

Литература: [1, с. 146–162; 2, с.83–85; 3, с. 5–24;].

Ранг матрицы. Свойства ранга матрицы. Элементарные преобразования матрицы. Вырожденные и невырожденные матрицы. Обратная матрица.

Основные понятия и определения

Рангом матрицы r $(r(A), rang(A))$ называется наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличный от нуля.

Таким образом, можно выделить основные свойства ранга матрицы:

1) $rang(A_{m\times n}) \le \min(m,n)$;
2) $rang(A_{m\times n}) = 0$, тогда и только тогда, когда сама матрица нулевая.

3) Ранг квадратной матрицы равен её порядку, тогда и только тогда, когда сама матрица невырожденная.

Пример 1.2.1. Найти ранг матрицы $B = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. Заметим, что данная матрица имеет размер 3×3, поэтому ранг не может быть числом большим 3. Поскольку в примере 1.5 был вычислен определитель данной матрицы (и его значение отлично от нуля), то $rang(B) = 3$. ►

В общем случае ранг матрицы может быть найден с помощью *элементарных* преобразований:

1. Отбрасывание нулевого ряда.
2. Умножение всех элементов ряда матрицы на число, не равное нулю.
3. Изменение порядка параллельных рядов.
4. Прибавление к каждому элементу ряда соответствующих элементов другого ряда, умноженных на любое число.

Пример 1.2.2. Найти ранг матрицы $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Заметим, что данная матрица имеет размер 3×5, поэтому её ранг не может быть числом большим 3.

Произведем элементарные преобразования. Оперируя строками (складывая сначала первую со второй, а затем первую с третьей), получим:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отбросив нулевую строку, будем иметь матрицу

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $rang(B) = 2$. ►

Квадратная матрица A порядка n называется *невырожденной,* если определитель $\det A \neq 0$. В противном случае матрица A называется *вырожденной.*

Для невырожденной матрицы A матрица A^{-1} такая, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ называется обратной. Она вычисляется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{*}, \qquad (1.1)$$

где $|A|$ – определитель исходной матрицы, а A^{*} – присоединенная матрица

$$A^{*} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1.2)$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения к элементам a_{ij}.

Пример 1.2.3. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ найти обратную матрицу.

Решение. Сначала необходимо вычислить определитель исходной матрицы (убедится в невырожденности матрицы или в существовании для неё обратной).

Вычислим определитель: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 26 \neq 0$ и, следовательно, обратная матрица существует. Определим, элементы присоединенной матрицы A^{*}, вычисляя алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 9; \quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Наконец, по формулам (1.1) и (1.2) вычислим элементы обратной матрицы

$$A^{-1} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -5 & 3 & 9 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{26} & \frac{1}{26} & \frac{3}{26} \\ \frac{-5}{26} & \frac{3}{26} & \frac{9}{26} \\ \frac{3}{26} & \frac{-7}{26} & \frac{5}{26} \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Упражнение 1. Установите вырожденность следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Упражнение 2. Определите ранг для следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Упражнение 3. Вычислите обратную матрицу для следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Тема 1.3. Системы линейных уравнений

Литература: [1, с. 56–69; 2, с. 24–36; 8, т. 1, с. 88–102].

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Правило Крамера. Однородная система двух линейных уравнений. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

Однородная система двух линейных уравнений с тремя неизвестными. Однородная система трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

Матричная запись системы линейных уравнений. Решение системы N линейных уравнений с N неизвестными. Метод Гаусса. Решение системы линейных уравнений в матричном виде.

Основные понятия и определения

Пусть дана произвольная *система линейных уравнений*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m_2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij} – заданные коэффициенты, $b_1, b_1, \ldots, b_m$, – заданные числа (свободные члены).

Множество чисел $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ называется решением системы линейных уравнений с n неизвестными, если подстановка этих чисел вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обращает все n уравнений системы в тождества.

Система, не имеющая решений, называется *несовместной,* а имеющая хотя бы одно решение – *совместной.*

Система, имеющая единственное решение, называется *определенной,* если более одного решения – *неопределенной*. В последнем случае каждое ее решение называется *частным,* а совокупность всех частных решений называется *общим* решением.

Решить систему означает: выяснить, совместна она или нет. Если совместна, найти ее общее решение.

Обозначим через $\boldsymbol{A}$ матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных системы, а через $\bar{\boldsymbol{A}}$ – матрицу, полученную из $\boldsymbol{A}$ присоединением столбца свободных членов:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Матрица A называется матрицей системы уравнений, а матрица $\overline{A}$ – расширенной матрицей этой системы.

Система линейных уравнений называется однородной, если все входящие в нее свободные члены равны нулю. Система называется однородной, если все свободные коэффициенты равны нулю. Однородная система всегда совместна. Нулевое решение есть всегда.

Однородная система имеет тривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель ее не равен нулю.

Определитель порядка k, составленный из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, называется минором k-го порядка матрицы A.

Систему линейных уравнений, в которой количество уравнений совпадает с количеством неизвестных можно переписать в матричном виде

$$A \cdot X = B,$$

где матрица системы – квадратная. Определитель этой матрицы Δ называется *определителем системы.* Если он отличен от нуля, то система называется *невырожденной.*

Для невырожденной системы $A \cdot X = B$ имеем:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B,$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$$X = A^{-1}B \qquad (1.3)$$

Отыскание решения системы по формуле (1.3) называют *матричным способом* решения системы.

Пример 1.3.1. Решить матричным способом систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 3, \\ x + 2z = 1, \\ x + 4z = 1. \end{cases} .$$

Решение. Составим для данной системы нужные матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $det A = -2$, то вычисляем элементы обратной матрицы: $A_{11} = 0$, $A_{12} = -2$, $A_{13} = 0$, $A_{21} = -4$, $A_{22} = 5$, $A_{23} = 1$, $A_{31} = 2$, $A_{32} = -1$, $A_{3} = -1$.

Следовательно $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

По формулам (1.3) находим

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ -2 \cdot 3 + 5 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выполним проверку: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ►

Теорема 1.1 (Крамера). *Если определитель* Δ *системы линейных уравнений отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам:*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где Δ_i *– определитель, полученный из* Δ *заменой j-го столбца столбцом свободных членов.*

Пример 1.3.2. Решить методом Крамера систему уравнений: $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x-y+z=1, \\ x+y-z=1. \end{cases}$.

Решение. Вычислим значения четырех определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Тогда по формулам Крамера получаем: $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1,\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1,\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$

Таким образом, записываем окончательный ответ $(1, 1, 1)$. ►

Рассмотрим алгоритм решения системы ***методом Гаусса.***

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными:

1. Составляем расширенную матрицу системы.
2. Приводим матрицу к ступенчатому виду (это значит, что нет строчек с одинаковым числом нулей в начале строки и строка с б*о*льшим количеством нулей в начале стоит ниже строки с меньшим количеством нулей).

С помощью элементарных преобразований матриц действуем сверху вниз и слева направо. Зануляя элемент столбца, работаем со строкой с тем же количеством нулей в начале.

3. Сравниваем ранги матриц (по теореме ***Кронекера-Капелли***)

если $rang(A) = rang(\overline{A})$, то система совместна;

если $rang(A) \neq rang(\overline{A})$, то система несовместна.

4. Выясняем, сколько решений имеет система:

а) если количество переменных n совпадает с рангом r, то система имеет единственное решение. В этом случае – восстановить систему по ступенчатому виду матрицы;

– из последнего уравнения найти x_r,

– из предпоследнего уравнения найти x_{r-1}, и так далее...

– из первого уравнения найти x_1. Записываем ответ.

б) если $r < n$, то решений бесконечно много.

– r переменных объявляются базисными (так, чтобы определитель, составленный из коэффициентов при этих переменных в ступенчатом виде матрицы, не был равен нулю), остальные $n - r$ переменных – свободными;

– восстановить систему, свободные переменные перенести в правые части уравнений;

– выразить из последнего уравнения x_r;

– выразить из первого уравнения x_1. Записать общее решение;

– придать свободным переменным произвольные значения. Найти значения базисных переменных. Записать частное решение.

Пример 1.3.3. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x_2 + x_3 - 2x_4 = -3, \\ x_1 \quad + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 = -2, \\ x_1 - 4x_2 - 7x_3 - x_4 = -19. \end{cases}$

Решение. Составим расширенную матрицу $\overline{A}$ и приведем ее с помощью элементарных преобразований строк к трапециевидному виду.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} R_2 \\ R_1 \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{array}\right) \to$$

Здесь первую и вторую строку поменяли местами. К третьей строке прибавим первую строку, умноженную на -2; к четвертой строке прибавим первую строку, умноженную на -1 и т.д.:

$$\begin{array}{c} \\ \\ -2R_1 + R_3 \\ -R_1 + R_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & -1 & -21 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \\ \\ \\ 6R_2 + R_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -39 \end{array}\right) \to$$

$$-\frac{1}{3}R_3\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -39 \end{array}\right) \to -\frac{1}{13}R_4\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

После выполненных преобразований сравниваем ранги: $rang(\overline{A}) = rang(A) = 4$. Следовательно, система совместна. Последней матрице соответствует система (равносильная исходной), которую можно представить в виде: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = -3, \\ x_3 - \ x_4 = -2, \\ x_4 = 3. \end{cases}$

Из системы, обратным ходом метода Гаусса (двигаясь снизу вверх), последовательно находим:

$x_4 = 3$, $x_3 = -2 + x_4 = -2 + 3 = 1$, $x_2 = -3 - x_3 + 2x_4 = -3 - 1 + 2 \cdot 3 = 2$,

$x_1 = 2 - 2x_2 + x_3 = 2 - 2 \cdot 2 + 1 = -1$.

Так как $(r = n = 4)$, то найденное решение является единственным.

Ответ: $(-1; 2; 1; 3)$ ►

Упражнение 1. Решите систему линейных уравнений *методом Крамера*

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -13; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

Упражнение 2. Решите систему линейных уравнений с помощью *обратной матрицы*:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 27,; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -12,; \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -6, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 1. \end{cases}$

Упражнение 3. Решите систему линейных уравнений *методом Гаусса*

а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -12,; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, ; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 9 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$; г) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$;

д) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 3x_2 - 9x_3 + 12x_4 = 0. \end{cases}$; е) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + 4x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$.

Тема 1.4. Аналитическая геометрия на плоскости

Литература: [1, с. 98–117; 2, с. 42–52; 8, т. 1, с. 15–24].

Уравнение линии на плоскости. Различные формы уравнения прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых. Условие параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости. Угол между прямыми. Полуплоскости.

Основные понятия и определения

Расстояние между точками $K\left(x_1; y_1\right)$, $L\left(x_2; y_2\right)$ определяется по формуле

$$|KL| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1.4)$$

Если точка $M\ (x;\, y)$ делит отрезок KL в отношении $\dfrac{|KM|}{|ML|} = \lambda$, тогда

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \quad (1.5)$$

Уравнение прямой ℓ, проходящей через точки K и L, записывается

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad (1.6)$$

которое можно представить в общем виде

$$Ax + By + C = 0. \quad (1.7)$$

Пусть две прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы своими общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, тогда: условие параллельности этих прямых эквивалентно условию коллинеарности нормальных векторов $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$, выражающего пропорциональность координат этих векторов, т. е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2},$$

а условие перпендикулярности прямых получается вследствие равенства нулю скалярного произведения $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ и имеет вид

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0\ .$$

Угол φ между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 равен углу между их нормальными векторами $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ и может быть определен по формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\,. \tag{1.8}$$

Расстояние d от точки $P(x_0; y_0)$ до прямой ℓ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{1.9}$$

Если в уравнении (1.7) $B \neq 0$, то уравнение можно представить в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b, \tag{1.10}$$

где k называется угловым коэффициентом данной прямой.

Если прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ соответственно, то условие параллельности прямых можно выразить в виде

$$k_1 = k_2,$$

а условие перпендикулярности записывается

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}\,.$$

Пример 2.2.1. Даны точки $A(1;-1)$, $B(4;3)$, $C(-1;2)$. Определить площадь треугольника ABC.

Решение. Площадь треугольника ABC можно определить как половину произведения основания на высоту. Пусть основание треугольника – отрезок CB (рис. 1), тогда по формуле (1.4) $|CB| = \sqrt{(4+1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{26}$. Уравнение прямой CB согласно (1.6) имеет вид $\frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{1}$ или $x + 1 = 5(y-2)$. Расстояние от вершины A до прямой CB есть очевидно высота, поэтому длину

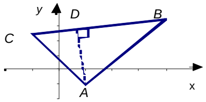

Рис.1

AD можно определить по формуле (1.9) $|AD| = \dfrac{|1-5\cdot(-1)+11|}{\sqrt{1^2+5^2}} = \dfrac{17}{\sqrt{26}}$. Окончательно, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}|CB|\cdot|AD| = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{26}\cdot\dfrac{17}{\sqrt{26}} = \dfrac{17}{2}$.

Ответ: $S_{ABC} = 8{,}5$. ►

Пример 2.2.2. Дана окружность $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ и прямая $y - x + 1 = 0$. Написать уравнение диаметра окружности, перпендикулярного данной прямой.

Решение. Выделяя полные квадраты в уравнении окружности

$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 2y + 1 - 1 - 4 =$, $= (x-2)^2 + (y+1)^2 - 9$ перепишем его в виде $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 3^2$. Таким образом, центр окружности находится в точке $A(2;-1)$, а радиус равен 3. Уравнение диаметра CD окружности (рис. 2) можно определить как уравнение прямой, перпендикулярной данной прямой BF и проходящей через точку A. Перепишем BF в виде (1.10) $y = x - 1$, т.е. угловой коэффициент прямой CD равен $k = -\dfrac{1}{1} = -1$. Таким образом, уравнение диаметра будет имеет вид $y = (-1)x + b$. Подставляя в это уравнение координаты центра окружности, определяем b=1 и получаем уравнение прямой CD в форме $y = -x + 1$.

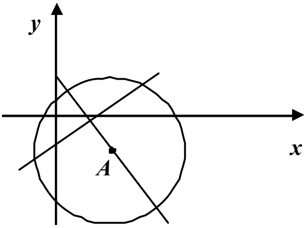

Рис. 2

Ответ: уравнение диаметра окружности имеет вид $y + x - 1 = 0$. ►

Упражнение 1. Напишите уравнение прямой график которой изображен на рисунке 3.

Упражнение 2. Определите угловой коэффициент прямой график которой изображен на рисунке 4.

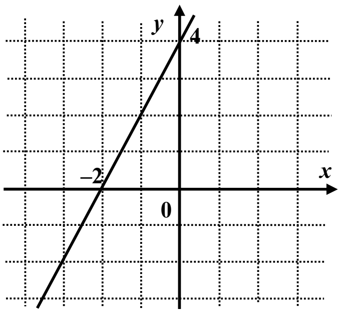

Рис. 3

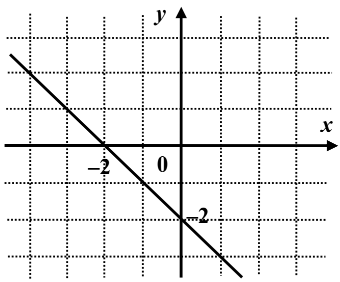

Рис. 4

Упражнение 3. В декартовой прямоугольной системе координат даны точки:

$$A(-2;3),\ B(1;1),\ C(0;5).$$

Задание 1. Напишите уравнение медианы *BE*.

Задание 2. Напишите уравнение высоты *AD*.

Задание 3. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника *ABC*.

Задание 4. Найдите площадь треугольника *ABC*.

Задание 5. Напишите уравнение прямой, параллельной прямой *BC* и проходящей через точку пересечения диагоналей параллелограмма *ABCK*.

Задание 6. Напишите уравнение высоты *CH* в треугольнике *ABC*.

Задание 7. Найдите длину высоты *CH*.

Задание 8. Найдите координаты вершины *D* параллелограмма *ABCD*.

Задание 9. Найдите координаты вершины *F* параллелограмма *ABFC*.

Задание 10. Найдите координаты вершины *G* параллелограмма *AEGB*.

Тема 1.5. Прямая и плоскость в пространстве

Литература: [1, с. 98–117; 2, с. 42–52; 8, т. 1, с. 53–62].

Уравнение линии в пространстве. Различные формы уравнения прямой и плоскости в пространстве. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Условие параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве. Угол между плоскостями. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью в пространстве.

Основные понятия и определения

Зафиксируем в пространстве произвольную декартову систему координат *Oxyz*. Если три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ определены своими декартовыми прямоугольными координатами $\vec{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\vec{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $\vec{c}=(x_3;\ y_3;\ z_3)$, то:

скалярное произведение векторов $(\vec{a},\vec{b})$ равно сумме парных произведений их соответствующих координат

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3; \tag{1.11}$$

векторное произведение векторов $[\vec{a},\vec{b}\,]$ можно определить по формуле

$$[\vec{a},\vec{b}\,]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \tag{1.12}$$

смешанное произведение $[\vec{a},\vec{b}\,]\vec{c}$ равняется определителю, строки которого соответственно равны координатам перемножаемых векторов, т.е.

$$[\vec{a},\vec{b}\,]\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{1.13}$$

Если заданы два вектора $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, то: необходимым и достаточным условием их *ортогональности* является равенство

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0;$$

условие *коллинеарности* векторов имеет вид

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2},$$

а угол φ между этими векторами определяется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}+z_1^{\ 2}}\sqrt{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}+z_2^{\ 2}}}. \tag{1.14}$$

Необходимым и достаточным условием *компланарности* трех векторов $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, $\vec{c}=(x_3;y_3;z_3)$ является равенство нулю определителя, строками которого служат координаты этих векторов, т.е.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

Уравнение вида

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{1.15}$$

где хотя бы одно из чисел A, B, C отлично от нуля, называется *общим* уравнением плоскости. Данная плоскость ортогональна вектору $\vec{n}=(A;B;C)$, называемому вектором *нормали* плоскости.

Общее уравнение плоскости (1.15) называется полным, если все его коэффициенты A, B, C, D отличны от нуля, в противном случае уравнение называется неполным.

Расстояние от произвольной точки $M_0\,(x_0;y_0;z_0)$ до некоторой плоскости α, определяемой уравнением (1.15) находится по формуле

$$\rho(M_0,\alpha)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (1.16)$$

Если все коэффициенты *A, B, C, D* отличны от нуля, то разделив все члены уравнения (35) на $(-D)$ и обозначив $a=-\frac{D}{A}$ $b=-\frac{D}{B}$, $c=-\frac{D}{C}$, уравнение плоскости можно привести к виду

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (1.17)$$

Полученное уравнение называется уравнением плоскости «в отрезках», а *a, b, c* – соответственно абсциссой, ординатой и аппликатой точек пересечения плоскости с осями *Ox, Oy, Oz*.

Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2\,(x_2;y_2;z_2)$, $M_3\,(x_3;y_3;z_3)$, не лежащие на одной прямой, можно получить, раскрыв определитель

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Рассмотрим случаи взаимного расположения плоскостей. Пусть две плоскости α_1 и α_2 заданы своими общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, тогда: условие *параллельности* данных плоскостей имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2},$$

условие *перпендикулярности* плоскостей α_1 и α_2 выглядит

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0,$$

а угол φ между плоскостями определяется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}=(A;B;C)$, имеет вид

$$A\,(x-x_0)+B\,(y-y_0)+C\,(z-z_0)=0. \qquad (1.18)$$

При произвольных *A, B, C* уравнение (1.18) определяет некоторую плоскость, принадлежащую связке плоскостей, проходящих через точку M_0. Поэтому уравнение (1.18) называют уравнением *связки* плоскостей.

Прямая линия в пространстве является линией пересечения двух различных и непараллельных плоскостей, определяемых уравнениями (1.15).

Любой ненулевой вектор $\vec{P}$, параллельный данной прямой, называется *направляющим* вектором данной прямой.

Уравнение прямой ℓ, проходящей через данную точку пространства $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и имеющей заданный направляющий вектор $\vec{P}=(l, m, n)$, имеет вид

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}. \tag{1.19}$$

Уравнение (1.19) принято называть *каноническим* уравнением прямой.

Каноническое уравнение прямой можно записать в виде

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma},$$

где α, β, γ – углы, образованные прямой с осями координат.

Направляющие косинусы прямой находятся по формулам

$$\cos\alpha=\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\ \cos\beta=\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\ \cos\gamma=\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

От канонического уравнения прямой (1.19), вводя параметр *t*, можно перейти к параметрическим уравнениям прямой

$$x=lt+x_1,\ y=mt+y_1,\ z=nt+z_1.$$

Если прямая ℓ и плоскость α заданы каноническим (1.19) и общим (1.15) уравнениями соответственно, то: условие параллельности прямой и плоскости имеет вид

$$Al+Bm+Cn=0, \tag{1.20}$$

условие перпендикулярности прямой и плоскости записывается

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}, \tag{1.21}$$

а угол φ между прямой ℓ и плоскостью α определяется по формуле

$$\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \tag{1.22}$$

Для определения точки пересечения прямой ℓ с плоскостью α нужно решить совместно их уравнения. При этом лучше воспользоваться параметрическими уравнениями прямой. Если:

a) $Al+Bm+Cn \neq 0$, то прямая ℓ пересекает плоскость α;

b) $Al+Bm+Cn=0$ и $Ax_1+By_1+Cz_1+D\neq 0$, то прямая ℓ параллельна плоскости α;

c) $Al+Bm+Cn=0$ и $Ax_1+By_1+Cz_1+D = 0$, то прямая ℓ лежит в плоскости α.

Упражнение 1. Найдите аппликату точки $A(4;1;z_0)$, принадлежащей плоскости $2x+y-2z-3=0$.

Упражнение 2. Найдите ординату точки $A(14;y_0;5)$, принадлежащей прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y+8}{4}=\frac{z+3}{2}$.

Упражнение 3. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;1;1)$ перпендикулярно к плоскости $2x+3y-4z-8=0$.

Упражнение 4. Определите взаимное расположение прямых ℓ_1 и ℓ_2, заданных в прямоугольной системе координат соответственно уравнениями:

а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{-4}$, $\qquad \frac{x}{4}=\frac{y}{6}=\frac{z-1}{-8}$;

б) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$, $\qquad \frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{4}$;

в) $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-4}$, $\qquad \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{-4}$.

Упражнение 5. Определите взаимное расположение плоскостей π_1 и π_2, заданных в прямоугольной системе координат соответственно уравнениями:

а) $x+2y-3z-6=0$, $\qquad 2x+4y-6z-8=0$;

б) $2x+3y-7z-8=0$, $\qquad x+4y+2z-1=0$;

в) $2x+y-4z=0$, $\qquad 2x+3y-z+5=0$.

Упражнение 6. Определите взаимное расположение прямой ℓ и плоскости π, заданных в прямоугольной системе координат соответственно уравнениями:

а) $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{4}$, $\qquad 2x+3y-2z-8=0$;

б) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-4}$, $\qquad 2x+3y-4z-8=0$;

в) $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-4}$, $\qquad 2x+3y-4z-8=0$.

Раздел 2. Введение в математический анализ

Тема 2.1. Элементы теории множеств

Литература: [1, с. 146–162; 2, с.83–85; 3, с. 5–24;].

Понятие множества. Операции над множествами. Числовые множества. Множества в R. Абсолютная величина.

Основные понятия и определения

Множество – это совокупность, собрание каких-либо объектов произвольной природы. ***Элементы*** множества – объекты, входящие в данное множество.

Если элемент $\boldsymbol{x}$ является элементом множества $\boldsymbol{X}$, то говорят, что $\boldsymbol{x}$ принадлежит множеству $\boldsymbol{X}$ и этот факт обозначают следующим образом: $\boldsymbol{x \in X}$. Если $\boldsymbol{x}$ не является элементом $\boldsymbol{X}$, то пишут $\boldsymbol{x \notin X}$.

Если все элементы множества $\boldsymbol{X}$ являются также элементами множества $\boldsymbol{Y}$, то говорят: $\boldsymbol{X}$ – подмножество $\boldsymbol{Y}$. Сам этот факт обозначают следующим образом: $\boldsymbol{X \subset Y}$.

Пустое множество $\varnothing$ – множество, которое не содержит ни одного элемента. Для пустого множества справедливо соотношение $\varnothing \subset \boldsymbol{X}$, где $\boldsymbol{X}$ – любое множество.

Объединением или ***суммой множеств*** $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ называется множество $\boldsymbol{Z}$, состоящее из элементов $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$. При этом пишут $\boldsymbol{Z = X + Y}$ или $\boldsymbol{Z = X \cup Y}$.

Операции над множествами удобно иллюстрировать диаграммами Эйлера-Венна, на которых множества, подлежащие рассмотрению, изображаются в виде совокупностей точек на плоскости. Рисунок 5 иллюстрирует объединение множеств $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$. Закрашенная область – множество $\boldsymbol{Z = X \cup Y}$.

Рис. 5 – Объединение множеств *X* и *Y*

Пересечением или ***произведением*** **множеств** $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ называется множество $\boldsymbol{Z}$, состоящее из элементов, одновременно принадлежащих $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$. Пересечение множеств обозначается $\boldsymbol{XY}$ или $\boldsymbol{Z = X \cap Y}$. Рисунок 6 иллюстрирует пересечение множеств $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$. Закрашенная область – множество $\boldsymbol{Z = X \cap Y}$.

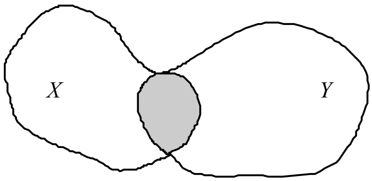

Рис. 6 – Пересечение множеств *X* и *Y*

Разностью множеств X и ***Y*** называется множество ***Z = X\Y***, состоящее из элементов ***X***, которых нет в ***Y***. Рисунок 7 иллюстрирует данную операцию над множествами.

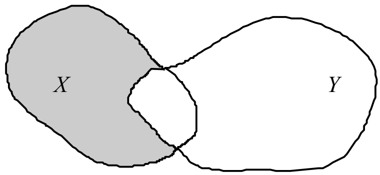

Рис. 7 – Разность множеств X и Y

Множество натуральных чисел $\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$.

Множество целых чисел $\boldsymbol{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

Множество рациональных чисел $\boldsymbol{Q} = \{m/n\}$, где $\boldsymbol{m, n \in Z}$, $\boldsymbol{n \neq 0}$ (дробь $\boldsymbol{m/n}$ – несократима).

Действительные числа можно изобразить точками на числовой прямой. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – два числа, причем $\boldsymbol{a < b}$. Общеприняты следующие обозначения:

$$[a,b] = \{x | a \le x \le b\}$$ – отрезок (сегмент);

$$(a,b] = \{x | a < x \le b\}$$ – полуинтервал;

$$[a,b) = \{x | a \le x < b\}$$ – полуинтервал;

$$(a,b) = \{x | a < x < b\}$$ – интервал.

Произвольный интервал (a, b), содержащий точку $\boldsymbol{c}$, т. е. $a < c < b$, будем называть ***окрестностью*** точки c. В частности, интервал $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называют $\boldsymbol{\varepsilon}$ – окрестностью точки c.

Пример 2.1.1. Пусть даны множества $X = \{1,10,15\}$, $Y = \{1,15,20\}$. Найти множества $X \bigcup Y, Y \bigcap X, X \setminus Y$.

Решение. $X \bigcup Y = \{1,15,20\}$, $Y \bigcap X = \{1,15\}$, $X \setminus Y = \{10\}$.►

Абсолютной величиной (или ***модулем***) числа x называется само число x, если $x \ge 0$, или число $-x$, если $x < 0$.

Таким образом, $|x| = \begin{cases} x, & если\ x \ge 0, \\ -x, & если\ x < 0. \end{cases}$

Пример 2.1.2. $|5| = 5; |-5| = -(-5) = 5; |0| = 0.$ ►

Основные свойства абсолютных величин

1. $|x| \ge 0,$ 2. $|x| = |-x|,$ 3. $-|x| \le x \le |x|,$

4. Неравенство $|x| \le \varepsilon \ (\varepsilon > 0)$ означает, что $-\varepsilon \le x \le \varepsilon,$

5. Неравенство $|x| \ge \alpha \ (\alpha > 0)$ означает, что либо $x \ge \alpha,$ либо $x \le -\alpha,$

6. $|x \pm y| \le |x| + |y|,$ 7. $|x \pm y| \ge |x| - |y|,$ 8. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|,$

9. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad (y \ne 0).$

Упражнение 1. Решить уравнения:

а) $|x-5| = x-5;$ б) $|x| = -x;$ в) $|x| = x+1;$

г) $|x-3| = x-3;$ д) $|x| = x+2;$ е) $|x+5| = |x-5|$;

ж) $|x^2 - 5x + 6| = -(x^2 - 5x + 6);$ з) $|x+4| = |x-4|.$

Упражнение 2. Решить неравенства:

а) $|2x-1| > 2x-1;;$ б) $|x-3| \ge 2;;$ в) $|x-2| < 3;;$

г) $|x-1| \ge 2;;$ д) $|x| < x+1;;$ е) $|3x-2| > 3x-2$.

з) $|x^2 - 5x + 6| > x^2 - 5x + 6;$ и) $|x| > x.$

Упражнение 3. Пусть даны множества: $A = \{1, 2, 3, ,9, 12, 13\}$, $B = \{1, 2, 3, 10, 13, 15\}$ и $C = \{1, 2, 3, 11, 12, 14, 15\}$. Определите множества:

а) $A \cap (B \cap C);$ б) $(A \cup B) \cup C$; в) $A \cap (B \setminus C);$

г) $A \cap (C \setminus B);$ д) $(A \cup B) \setminus (B \cup C);$ е) $A \setminus (B \cap C).$

Упражнение 4. Пусть даны множества: $A = (0;\ 3]$, $B = [1;\ 3)$ и $C = (0;\ 4]$. Определите множества:

а) $A \cap (B \cap C);$ б) $(A \cup B) \cup C$; в) $A \cap (B \setminus C);$

г) $A \cap (C \setminus B);$ д) $(A \cup B) \setminus (B \cap C);$ е) $A \setminus (B \cap C).$

з) $A \times B$; и) $\overline{A} \times (B \cup C);$ к) $\overline{A} \setminus (B \cap C).$

Тема 2.2. Понятие функции. Преобразование графиков

Литература: [1, с. 172–187; 2, с. 86–95; 3, с. 123–138; 8, т. 1, с. 136–137].

Понятие функций и способы их задания. Область определения функции и ее график. Преобразования графика (сдвиг по осям, сжатие и растяжение, операция модуля от аргумента и функции).

Понятие сложной и обратной функции. «Экономические» функции. Понятие производственной функции.

Основные понятия и определения

Пусть X**,** Y **–** числовые множества. Соответствие ***f*****,** которое каждому числу $\boldsymbol{x \in X}$ сопоставляет одно и только одно значение $\boldsymbol{y \in Y}$, называется ***функцией y одной переменной x***, при этом пишут $y = f(x)$**.**

Символ ***f*** означает закон, с помощью которого устанавливается соответствии е числа $\boldsymbol{y \in Y}$ числу $\boldsymbol{x \in X}$. Переменная ***x*** – независимая переменная (или ***аргумент***). Множество ***X*** – область задания или определения (существования) функции. Область определения функции обозначается $D(y)$ или $D(f)$. Переменная y – множество значений функции или ***зависимая переменная***. Множество значений функции обозначается $E(y)$. Множество ***Y*** – множество всех значений функции, образ множества ***X***, полученный при помощи функции ***f***. Говорят, что функция ***f*** отображает X в Y.

Если функция ***f*** отображает множество ***X*** в ***Y***, а функция ***g*** отображает множество Y в ***Z***, то функцию $z = g(f(x))$ называют функцией от функции или ***сложной функцией*** (***суперпозицией*** или ***композицией f*** и ***g***). Сложная функция в данном случае определена на ***X*** и отображает ***X*** в ***Z***.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости xOy с координатами $(x; f(x))$, где x – значение аргумента, а y – соответствующее значение функции.

Функция $y = f(x)$ называется *четной* (*нечетной*), если она определена на множестве, симметричном относительно нулевой точки и обладает на нем свойством: $f(-x) = f(x)\;[f(-x) = -f(x)]\;\; \forall x$.

Функция $y = f(x)$*,* определенная на всей действительной оси, называется *периодической* с периодом $T > 0$, если $f(x+T) = f(x)$ для $\forall x$. Основным периодом функции называется наименьшее T, обладающее указанным свойством.

Нулями функции называются те значения $x = x_0$, при которых $f(x_0) = 0$. На графике это точки пересечения с осью абсцисс.

Интервалами знакопостоянства функции называются интервалы, в которых функция сохраняет свой знак.

Функция называется *ограниченной*, если $\exists M > 0 : \forall x \in D \Rightarrow |f(x)| \le M$. График ограниченной функции лежит в полосе шириной $2M$.

Пример 2.2.1. Найти область определения функции $y = \dfrac{x^2 - 1}{1 - 3x}$.

Решение. Значения функции y можно определить для всех x, кроме тех, при которых знаменатель дроби обращается в нуль, т.е. $1-3x\neq 0$, а $x\neq\frac{1}{3}$**.** Следовательно, $D(y)=\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};\infty\right)$**.** ►

Пример 2.2.2. Найти множество значений функции $y=5+3\cos x$.

Решение. Так как косинус принимает значения, не превосходящие по модулю единицы, то получаем неравенство $|\cos x|\leq 1$, или $-1\leq\cos x\leq 1$. Умножим обе части этого равенства на 3 и, прибавляя к каждой из них по 5, получим $-3\leq 3\cos x\leq 3\Rightarrow 2\leq 3\cos x+5\leq 8$. Следовательно, $E(y)=[2;8]$ ►

Пример 2.2.3. Установить четность или нечетность функции $y=3x^2-x^3$.

Решение. $y(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3\neq y(x)$. Следовательно, функция четной не является. Вынесем знак «–» за скобку: $y(-x)=-(3x^2-x^3)\neq -y(x)$, следовательно, и нечетной функция не является. Таким образом данная функция является функцией общего вида. ►

Упражнение 1. Найдите область определения следующих функций:

а) $y=x^2-4x+5$; б) $y=\dfrac{x-2}{x^2+2x+4}$; в) $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2+2x+4}$;

г) $y=\dfrac{x-2}{(x-1)(x+2)}$; д) $y=\dfrac{1}{2^{3x-6}-1}$; е) $y=\sqrt{\dfrac{x(x-1)}{(x-3)(x+4)}}$;

ж) $y=\sqrt{10+x}+\dfrac{1}{x+5}$; з) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x+2}$;

к) $y=\sqrt[4]{\dfrac{x-9}{(x-1)(x-5)}}+\ln\dfrac{10-x}{x-1}$; л) $y=\arcsin\dfrac{x}{(x-2)(x+1)}$.

Упражнение 2. Найдите область значения следующих функций

а) $y=(x+10)(1-x)$; б) $y=1-2\cos 3x$; в) $y=-x^2+4x+3$;

г) $y=\sqrt{9-x^2}$; д) $y=3\cos^2 2x-1$; е) $y=3\cos 2x-1$;

Упражнение 3. Определите четность (нечетность) следующих функций

а) $y=-x^4+4x^2+3$; б) $y=-2\cos 3x$; в) $y=-x^3+2x+5$;

г) $y=\dfrac{x^2-9}{(x+1)(x+1)}$; д) $y=2\arccos x$; е) $y=tgx+x^3$;

Упражнение 4. Определите периодичность следующих функций а) $y=-x^2+4x+3$; б) $y=|x|$; в) $y=[x]$;

г) $y=\{x\}$; д) $y=-2\cos 3x$; е) $y=\sin\frac{x}{4}$.

Упражнение 5. Представить функцию в виде композиции основных элементарных функций:

а) $y=3^{\sin x}$; б) $y=\cos^2\sqrt{x}$; в) $y=arctg^3\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Упражнение 6. Построить график функции:

а) $y=\ln(x-1)$; б) $y=x^2-4x+1$; в) $y=\frac{x^3+x}{3}$ на отрезке [–4;4];

г) $y=\sin(3x-2)+1$; д) $y=\sin x+\cos x$; е) $y=|(3x+9)(5x-10)|$.

Тема 2.3. Предел функции

Понятие числовой последовательности. Монотонность и ограниченность числовой последовательности. Предел последовательности. Свойства сходящихся последовательностей. Признаки существования предела.

Предел функции в точке и его свойства. Замечательные пределы. Односторонние пределы, бесконечные пределы. Основные типы неопределенностей. Бесконечно большие и бесконечно малые функции. Сравнение бесконечно малых функций.

Основные понятия и определения

Если каждому числу n из натурального ряда чисел 1, 2, 3, ..., n, **...** поставлено в соответствие вещественное число $\boldsymbol{x_n}$, то множество вещественных чисел $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}$, ..., $\boldsymbol{x_n}$, ... называется ***числовой последовательностью*** или просто ***последовательностью***.

Числа $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}$, ..., $\boldsymbol{x_n}$, ... называются ***элементами*** (или ***членами***) последовательности, символ $\boldsymbol{x_n}$ – ***общим элементом*** (или ***общим членом***) последовательности, а число $\boldsymbol{n}$ – его номером. Сокращенно последовательность обозначается символом $\{\boldsymbol{x_n}\}$. Последовательность считается заданной, если указан способ получения любого ее элемента. Так, например, формула $x_n=\frac{1}{n}$ или символ $x_n=\left\{\frac{1}{n}\right\}$ обозначают последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$

Геометрически последовательность изображается точками на координатной прямой (рис. 8).

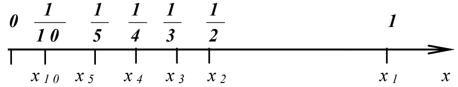

Рис. 8 – Изображение последовательности на числовой прямой

Число A называется ***пределом*** числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N = N(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех натуральных чисел $n > N$, выполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$. Если A – предел последовательности $\{x_n\}$, то это записывается так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

Последовательность, имеющая предел, называется ***сходящейся***, в противном случае – ***расходящейся***.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ с общим членом $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

$$(1+1)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \dots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \dots .$$

Перепишем ее в виде 2; 2,25; 2,37; 2,44; ...; 2,71; .... Легко видеть, что последовательность является возрастающей. Можно доказать, что она ограничена, т.е. $x_n < 3$, для любого номера n.

Теорема 2.1*. Монотонная (невозрастающая или неубывающая) ограниченная последовательность сходится.*

Используя теорему можно заключить, что рассмотренная последовательность сходится, т.е. имеет предел. Этот предел обозначают буквой e:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Число e играет большую роль в математике. Оно, в частности, является основанием натуральных логарифмов, т.е. $\log_e x = \ln x$. Число $e \approx 2{,}71828...$ При решении задач полезно иметь в виду следующие равенства:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m - 1}{x} = m.$$

Пусть начальная сумма P вложена под R % годовых и проценты начисляются n раз в год, тогда после каждого начисления получаются следующие суммы:

$$P, P\left(1+\frac{r}{n}\right), P\left(1+\frac{r}{n}\right)^2, P\left(1+\frac{r}{n}\right)^3, \dots P\left(1+\frac{r}{n}\right)^n, \dots, \text{ где } \boldsymbol{r = R/100}.$$

Через $\boldsymbol{t}$ лет общая сумма вклада вычисляется по формуле $A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$.

Рассмотрим случай продолжающегося начисления, при котором число перерасчетов n неограниченно возрастает ($\boldsymbol{n \to \infty}$). Пусть $\boldsymbol{m = n/r}$, тогда получим

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = P\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mrt} = P\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt}, \quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} \to e.$$

при неограниченном росте m. Следовательно

$$P\cdot\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt} \to P\cdot e^{rt}; \quad A = P\cdot e^{rt}.$$

Пример 2.3.1. Сумма 12000 \$ инвестирована под 9 % годовых. Найти сумму через пять лет: а) при квартальном начислении; б) при продолжающемся бесконечное число раз. Сравнить суммы между собой.

Решение. а) При квартальном начислении $n = 4$ имеем

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = 12000\cdot\left(1+\frac{0{,}09}{4}\right)^{4\cdot 5} = 18726{,}11\ \$,$$

б) При продолжающемся многократном начислении

$$A = P\cdot e^{rt} = 12000\cdot e^{0{,}09\cdot 5} = 18819{,}75\$.$$

При многократном начислении сумма на 18819,75 – 18726,11 = 93,64 ***\$*** больше, чем при ежеквартальном начислении. ►

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{x_0}$. Тогда число A называется ***пределом*** функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ (в точке $\boldsymbol{x = x_0}$), если для любого $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ существует $\delta > 0$ $\delta = \delta(\varepsilon)$, такое что $0 < |x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. При этом в самой точке $\boldsymbol{x_0}$ функция $y = f(x)$ может и не существовать.

Если существует предел вида $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$, который обозначают также $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $f(x_0-0)$, то он называется ***пределом слева*** функции $\boldsymbol{f(x_0)}$ в точке $\boldsymbol{x_0}$. Аналогично, если существует предел вида $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$ (в другой записи $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ или $f(x_0+0)$, то он называется ***пределом справа*** функции $\boldsymbol{f(x_0)}$ в точке $\boldsymbol{x_0}$. Пределы слева и справа называются ***односторонними*** пределами.

Для существования предела функции $f(x)$ в точке $\boldsymbol{x_0}$ необходимо и достаточно, чтобы оба односторонних предела в точке $\boldsymbol{x_0}$ существовали и были равны, т.е. $f(x_0-0)=f(x_0+0)$.

Теорема 2.2. *Пусть существуют конечные* $\lim\limits_{x\to x_0} f_i(x)$, $(i=\overline{1,n})$. *Тогда*

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{i=1}^{n} f_i(x)=\sum_{i=1}^{n}\lim_{x\to x_0} f_i(x),\quad \lim_{x\to x_0}\prod_{i=1}^{n} f_i(x)=\prod_{i=1}^{n}\lim_{x\to x_0} f_i(x).$$

Теорема 2.3. *Пусть существуют пределы* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0$. *Тогда существует предел* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}$.

Теорема 2.4. *Пусть существует предел* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *и* $C=const$. *Тогда постоянный множитель C можно выносить за знак предела, т.е.*

$$\lim_{x\to x_0}\left(C\cdot f(x)\right)=C\lim_{x\to x_0} f(x).$$

Данные теоремы справедливы и при $\boldsymbol{x\to\pm\infty}$. Если условия этих теорем не выполняются, то могут возникнуть неопределенности вида $\infty-\infty,\dfrac{\infty}{\infty},\dfrac{0}{0}$ и др.

Теорема 2.5. *Пусть функции* ***f(x)****,* ***g(x)*** *и* ***h(x)*** *определены в некоторой окрестности точки* $\boldsymbol{x_0}$*, за исключением, быть может, самой точки* $\boldsymbol{x_0}$*, и функции* ***f(x)****,* ***h(x)*** *имеют в точке* $\boldsymbol{x_0}$ *предел, равный* ***A****, т.е.* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$. *Пусть, кроме того, выполняются неравенства* ***f(x) ≤ g(x) ≤ h(x)***. *Тогда* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$.

Теорема 2.6. *Если функция* ***y = f(x)*** *определена в точке* $\boldsymbol{x_0}$ *и является элементарной, то ее предел равен значению функции в этой точке, т.е.* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Теорема 2.7. *Если предел функци* ***y = f(x)*** *существует, то он единственен.*

Теорема 2.8. *Если* $C=const$*, то предел константы равен самой константе, т.е.* $\lim\limits_{x\to x_0} C=C$.

Теорема 2.9. **(***Первый замечательный предел***).** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Пример 2.3.2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x}$.

Решение. Знаменатель дроби при $x \to 0$ стремится к нулю. Поэтому теорема 2 здесь неприменима. Для нахождения предела преобразуем дробь, используя формулу ***$1-\cos x = 2\sin^2(x/2)$***. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0 = 0. \blacktriangleright$$

Первый замечательный предел используется для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Теорема 2.10. (*Второй замечательный предел*). $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Пример 2.3.3. Найти $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$.

Решение. Положим $x = 3y$. Тогда при $x \to \infty$ и $y \to \infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{3y} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right) = e\cdot e\cdot e = e^3. \blacktriangleright$$

Пример 2.3.4. Вычислить $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1}$.

Решение. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1+2}{2x-1}\right)^{3x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{3x+1}$.

Положим $\frac{2}{2x-1} = \frac{1}{y}$. Тогда $x=y+\frac{1}{2}$ и при $x\to\infty$, $y\to\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{3x+1} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{3y+5/2} == \lim_{y\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^3\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)^{5/2}\right) = e^3. \blacktriangleright$$

Второй замечательный предел используется для раскрытия неопределенности вида 1^∞.

Для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ можно использовать следующие способы.

1-й способ. *Деление числителя и знаменателя на старшую степень* x.

Пример 2.3.5. Вычислить $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3+x+4}{x^3+x^2-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3+x+4}{x^3+x^2-1}=\left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{4}{x^3}}{\frac{x^3}{x}+\frac{x^2}{x^3}-\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}3+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}1+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^3}}=\frac{3+0+0}{1+0+0}=3$$

При решении примера использованы теоремы о пределе суммы и частного (что возможно, т.к. предел знаменателя не равен нулю). ►

2-й способ. *Через сравнение бесконечно больших функций путем замены на эквивалентные бесконечно большие функции*

3-й способ. *По правилу Лопиталя* (см. пункт 3.6).

Для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ можно использовать следующие способы.

1-й способ. *Разложение на множители многочленов числителя и/или знаменателя.*

Пример 2.3.6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=\left|\begin{array}{c}x^2-2x-3=0\\ D=b^2-4ac=4+4\cdot 3=16\\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{2\pm 4}{2}, x_1=3, x_2=-1\\ x^2-2x-3=(x-x_1)(x-x_2)=(x-3)(x+1)\end{array}\right|=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x+1}=\frac{3+3}{3+1}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1{,}5.\ ►$$

2-й способ. При наличии разности корней используется прием *дополнения* до разности квадратов (кубов), состоящий в *домножении* на *сопряженное* выражение числителя и знаменателя дроби.

Пример 2.3.7. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

Решение. Домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение $\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)$ и применим формулу сокращенного умножения $(a-b)(a+b)=\left(a^2-b^2\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=\frac{0}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{0}{2}=0.$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt[3]{x-6}+2\right)\left(\left(\sqrt[3]{(x-6)^2}\right)-2\sqrt[3]{x-6}+4\right)}{(x+2)\left(\left(\sqrt[3]{(x-6)^2}\right)-2\sqrt[3]{x-6}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x-6+8)}{(x+2)\left(\left(\sqrt[3]{(x-6)^2}\right)-2\sqrt[3]{x-6}+4\right)}=$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{(x+2)\left(\left(\sqrt[3]{(x-6)^2}\right)-2\sqrt[3]{x-6}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{1}{\left(\left(\sqrt[3]{(x-6)^2}\right)-2\sqrt[3]{x-6}+4\right)}=\frac{1}{\sqrt[3]{(-8)^2}-2\sqrt[3]{-8}+4}=\frac{1}{4+4+4}=\frac{1}{12}.$$

3-й способ. *Через первый замечательный предел или через сравнение бесконечно малых функций путем замены на эквивалентные*

4-й способ. *По правилу Лопиталя* (см. пункт 3.6).

Упражнение 1. Дана формула общего члена последовательности $x_n=\frac{n}{n+1}$. Написать пять первых элементов последовательности.

Упражнение 2. Показать, что при $n\to\infty$ последовательность $x_n=\frac{2n}{n+1}$ имеет пределом число 2.

Упражнение 3. Показать, что при $n\to\infty$ последовательность $\frac{7}{3},\frac{10}{5},\frac{13}{7},...,\frac{3n+4}{2n+1},...$ имеет пределом число $\frac{3}{2}$.

Упражнение 4. Банк выплачивает 12% годовых, начисляемых ежеквартально (сложный процент). Каким должен быть начальный вклад, чтобы через три года вклад вместе с процентами составил 20000 рублей.

Упражнение 5. Вычислите пределы:

а) $\lim_{x\to -1}\frac{3x^2-3}{x^2+3x+2}$; б) $\lim_{x\to -2}\frac{4-x^2}{2x^2+6x+4}$; в) $\lim_{x\to -2}\frac{4x^2+12x+8}{x^2-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3x^2+12x+9}{x^2+3x}$; д) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-2x-4}{x^2-4x-5}$; е) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+8x+7}{2x^2-2x-4}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-5x^2+10x}{x^2+x-6}$; з) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x^2-2x+3}{x^2-4x+3}$; к) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-2x^2+2x+4}{x^2+8x+7}$.

Упражнение 6. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 4x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{x-\pi}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 2x}$.

Упражнение 7. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{16-x}-\sqrt{16+x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4-x}{\sqrt{1+2x}-3}$; д) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{8-x}{\sqrt{9+2x}-5}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

Упражнение 8. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(1-x)^2+(1+x)^2}{1-x^2+2x}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(1-x)^2-(1+x)^2}{1-x^2+2x}$; в) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(1-2x)^2+(1+x)^2}{x^2+2x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2+x-2}{(1-x)^2+(1+x)^2}$; д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+x-2}{(1-x)^2-(1+x)^2}$; е) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}-12}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-12}{2-\sqrt{x}-x}$; з) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2\sqrt[3]{x}+4\sqrt[3]{x^2}-8}{2-2\sqrt[3]{x}-4x}$; к) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4x+3\sqrt{x}+2}{1-\sqrt{x}-2x}$.

Упражнение 9. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2-3x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x}\right)$ г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-3x}\right)$.

Упражнение 10. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x}$; в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{x-1}$;

Тема 2.4. Непрерывность ФОП

Литература: [1, с. 188–220; 2, с. 96–99; 3, с. 141–173; 8, т. 1, с. 149–150].

Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке. Непрерывность элементарных функций. Типы разрывов. Непрерывность функции на отрезке.

Асимптоты графика функции.

Основные понятия и определения

Функции $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если:

- функция определена в точке и её окрестности (т.е. существует $f(x_0)$);
- существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;
- и частное значение равно пределу функции $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая линия, обладающая тем свойством, что расстояние от переменной точки на графике до прямой стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки графика от начала координат.

Различают ***вертикальные, горизонтальные и наклонные*** асимптоты:

1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{x_0}$ (исключая, возможно, саму эту точку) и хотя бы один из пределов функции при $x \to x_0 - 0$ или $x \to x_0 + 0$ равен бесконечности, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$. Тогда прямая $x = x_0$ является ***вертикальной*** асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Очевидно и обратное, если прямая $x = x_0$ – вертикальная асимптота, то хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x)$ бесконечен. Таким образом, вертикальные асимптоты $x = x_0$ следует искать в точках разрыва функции $y = f(x)$ или на концах ее области определения $(a;b)$, если a и b конечные числа.

2. Пусть функция $y = f(x)$ определена при достаточно больших $\boldsymbol{x}$ и существует конечный предел функции $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$. Тогда прямая $\boldsymbol{y = b}$ есть ***горизонтальная*** асимптота графика функции $y = f(x)$.

Если конечен только один из пределов $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b_л$ или $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b_п$, то функция имеет лишь ***левостороннюю*** $\boldsymbol{y = b_л}$, или ***правостороннюю*** $\boldsymbol{y = b_п}$ горизонтальную асимптоту.

3. Пусть функция $y = f(x)$ определена при достаточно больших $\boldsymbol{x}$ и существуют конечные пределы $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - k\cdot x\right]$. Тогда прямая $\boldsymbol{y = kx + b}$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$**.**

Наклонная асимптота, так же как и горизонтальная, может быть правосторонней (при $\boldsymbol{x \to +\infty}$) и левосторонней (при $\boldsymbol{x \to -\infty}$). Для их существования необходимо существование оба предела были конечны.

Пример 2.4.1. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$**.**

Решение. 1. Найдем *вертикальные* асимптоты. В точке $x = 1$ функция не определена. Вычислим пределы $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} \dfrac{x^3}{2(x-1)^2} = \dfrac{(1\pm 0)^3}{2(\pm 0)^2} = +\infty$. Следовательно, точка $x = 1$ является точкой бесконечного разрыва, значит, прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой.

2. Найдем *наклонные* асимптоты. Для уравнения $y = kx + b$ определим значения параметров.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{2(x-1)^2}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2(x-1)^2} = \left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle = \frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-2x+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-2x+1} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - k\cdot x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{2(x-1)^2} - \frac{1}{2}\cdot x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x^2 - x}{2(x-1)^2}\right] = \left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{2x^2-4x+2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{2x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Оба предела существуют и конечны, значит, правая и левая наклонная асимптота имеют одинаковые уравнения $y = \dfrac{x}{2} + 1$. ►

Упражнение 1. Исследуйте следующие функции на непрерывность:

а) $y = -x^2 + 4x + 3$; б) $y = |x|$; в) $y = [x]$;

г) $y=\dfrac{2}{\sqrt{(x-1)(10-x)}}$;

д) $y=\begin{cases} 1-x, & x<-2; \\ 4, & -2\le x\le 1; \\ \dfrac{1}{x-1}, & x>1; \end{cases}$

е) $y=2^{|x|}-\dfrac{x}{|x|}$;

ж) $y=\begin{cases} 1-x, & x<-2; \\ 2, & -2\le x\le 1; \\ 3-x^2, & x>1. \end{cases}$

з) $y=\begin{cases} 1-x, & x<-2; \\ 3, & -2\le x\le 1; \\ 3-x^2, & x>1. \end{cases}$

и) $y=\begin{cases} 2x+5, & x<-1; \\ |x(2-x)|, & -1\le x\le 2; \\ 4-x^2, & x>2. \end{cases}$

Упражнение 2. Найдите асимптоты графика функции:

а) $y=\dfrac{x+2}{1-x}$; б) $y=\dfrac{x^2}{x-3}$; в) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$;

г) $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$; д) $y=\dfrac{x^2}{x+3}$; е) $y=\dfrac{x^2}{2-x}$;

ж) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$; з) $y=\dfrac{\ln x}{x}$; и) $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}$.

Раздел 3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Тема 3.1. Понятие производной. Правила дифференцирования

Литература: [1, с. 226–249; 2, с. 99–105; 3, с. 178-194; 8, т. 1, с. 151–161].

Понятие производной и ее геометрический смысл. Правая, левая производные. Дифференцируемость функции в точке. Связь понятий дифференцируемости и непрерывности. Таблица производных и правила дифференцирования. Производные высших порядков.

Эластичность функции и её свойства. Эластичность спроса и предложения.

Основные понятия и определения

Пусть функция $y=f(x)$ определена в $\delta-$ окрестности точки x_0 и

$$\Delta\, y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

приращение функции в этой точке, соответствующее приращению аргумента $\Delta x=x-x_0$, где $x\in(x_0-\delta;\,x_0+\delta)$.

Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Геометрический смысл производной состоит в том, что производная функции *f(x)* при данном значении x_0 аргумента равна угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке $M_0(x_0, f\ (x_0))$, т.е. $f'(x_0)=tg\alpha$, где α – величина угла, образованного касательной с положительным направлением оси *Ox*. Поэтому уравнение касательной к графику функции $y=f\ (x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0=f\ (x_0)$, имеет вид

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемые в точке x_0 функции, тогда

$$(u\pm v)'=u'\pm v',$$

$$(u\cdot v)'=u'v+v'u,$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}.$$

Ниже приводятся основные правила вычисления производной функции.

Пусть ***a; c; n – const***, тогда

1. $(x)'=1$ **2.** $(x^n)'=n\cdot x^{n-1},\ (n\in R)$

3. $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ **4.** $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

5. $\left(a^x\right)'=a^x\cdot \ln a,\ (a>0, a\neq 1)$ **6.** $(e^x)'=e^x$

7. $(\sin x)'=\cos x$ **8.** $(\cos x)'=-\sin x$

9. $(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ **10.** $(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$

11. $\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x\cdot \ln a},\ (a>0, a\neq 1)$ **12.** $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

13. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **14.** $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$ **16.** $(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$

Производная от производной первого порядка называется производной второго порядка или второй производной и обозначается так: $f''(x)$. Аналогично

$$f''(x)=[f'(x)]',\ f'''(x)=[f''(x)]'.$$

Упражнение 1. Дана функция $h(x) = f(x)g(x)$. Найдите значение производной $h'(5)$, если соответствующие значения равны: $f(5)=3, f'(5)=-2$, а $g(5)=6, g'(5)=6$.

Упражнение 2. Дана функция $h(x) = f(x)g(x)$. Найдите значение производной $g'(3)$, если соответствующие значения равны: $f(3)=-3, f'(3)=2$, а $h(3)=-12, h'(3)=2$.

Упражнение 3. Для следующих функций найдите y':

а) $y=\sqrt{x}-3x^2+5$; б) $y=\arcsin x+3x^5$; в) $y=(x+1)e^x$;

г) $y=e^x tgx$; д) $y=arc\cos x-4\sqrt[3]{x^5}+2\pi$; е) $y=(3x+2)\cos x$;

ж) $y=\dfrac{2+e^x}{2-e^x}$; з) $y=3\cos x-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$; к) $y=\dfrac{1-2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}$.

Упражнение 4. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2+3x-18$ в точке $x_0=-3$.

Упражнение 5. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x\sqrt{x}$ в точке $x_0=2$.

Упражнение 6. Найдите точку касания касательной к графику функции $f(x)=-x^2+7$, если известно, что она перпендикулярна прямой $x-8y+5=0$.

Упражнение 7. Для следующих функций найдите y'':

а) $y=\sqrt{x}-5x^2+3$; б) $y=\dfrac{2}{x}-x\sqrt[3]{x}+\dfrac{x}{\pi}$; в) $y=(x-1)e^x$;

г) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{4}{x}$; д) $y=2\sin x-3\cos x+10\sqrt{x}$; е) $y=e^x tgx$.

Упражнение 8. Для следующих функций найдите y''':

а) $y=15x^4+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; б) $y=\ln\cos x$; в) $y=(x-1)e^x$.

Тема 3.2. Дифференциал функции и его свойства

Литература: [1, с. 226–249; 2, с. 99–105; 3, с. 178-194; 8, т. 1, с. 151–161].

Понятие дифференциала и его геометрический смысл. Приближенные вычисления с помощью дифференциала. Дифференциалы высших порядков.

Основные понятия и определения

Дифференциалом функции называется величина, пропорциональная приращению независимой переменной и отличается от приращения функции на бесконечно малую функцию высшего порядка малости по сравнению с приращением независимой переменной.

Под ***дифференциалом*** независимой переменной понимается дифференциал функции $y = x$.

Так как $y' = 1$ для функции $y = x$, то согласно следствию имеем

$$dx = \Delta x,$$

т.е. *дифференциал независимой переменной равен приращению этой независимой переменной.*

Пользуясь этим последним свойством, формулу $dy = y'\Delta x$ можно переписать в следующем виде $dy = y'dx$.

Выясним геометрический смысл дифференциала функции. Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Пусть $M(x, y)$ и $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ – две точки данной кривой (рис. 9). В точке M проведем касательную MT к графику функции (здесь T – точка пересечения касательной с $M_1N \parallel Oy$) и рассмотрим ΔMTN с катетами $MN = \Delta x$ и NT, где $MN \parallel Ox, NT \parallel Oy$. Если через φ обозначить угол, образованный касательной MT с положительным направлением оси Ox, то будем иметь $NT = \Delta x \cdot tg\varphi$.

Но из геометрического смысла производной следует $tg\varphi = f'(x) = y'$.

Поэтому получаем $NT = y'\Delta x = dy$.

Таким образом, дифференциал функции $y = f(x)$ в данной точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получает приращение Δx.

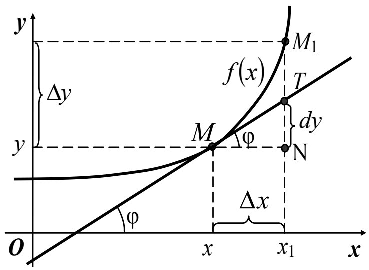

Рис. 9 – Геометрический смысл дифференциала

Приращение функции $\Delta y = NM_1$, вообще говоря, не равно дифференциалу $dy = NT$ этой функции, т.е. $\Delta y > dy$ или $\Delta y < dy$.

Пример 3.2.1. Найти дифференциал dy и приращение Δy функции $y = x^2$ при:

1) произвольных значениях x и Δx;

2) $x = 20, \quad \Delta x = 0{,}1$.

Решение. 1) $\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x - (\Delta x)^2$; $dy = (x^2)' \cdot \Delta x = 2x\Delta x$.

2) Если $x = 20,\ \Delta x = 0{,}1$, то:

$\Delta y = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}1 + (0{,}1)^2 = 4.01$; $dy = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}1 = 4$.▶

Дифференциалом n*-го* ***порядка*** $d^n f(x)$ функции $f(x)$ называется дифференциал от ее $(n-1)$-го дифференциала, т.е.

$$d^n f(x) = d\left[d^{n-1} f(x)\right].$$

Теорема 3.1. *Дифференциал* n*-го порядка от данной* $(n-1)$ *раз дифференцируемой функции равен произведению производной* $(n-1)$*-го порядка этой функции на* n*-ю степень дифференциала независимой переменной, т.е*

$$d^n f(x) = f^{(n-1)}(x)dx^n.$$

Упражнение 1. Для следующих функций найдите dy:

а) $y = 4\sqrt{x} - x^2 + 7$; б) $y = 2\arcsin x - x^5$; в) $y = (x+3)e^x$;

г) $y = e^x ctgx$; д) $y = 4arc\cos x - 6\sqrt[3]{x^5} + \pi$; е) $y = (3x+5)\sin x$;

ж) $y = \dfrac{5+e^x}{5-e^x}$; з) $y = 3\cos x - \dfrac{4}{\sqrt{x}}$; к) $y = \dfrac{1-6\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}$.

Упражнение 2. Для следующих функций найдите d^2y:

а) $y = \sqrt{x} - 5x^3 + 3$; б) $y = \dfrac{2}{x^2} - x\sqrt[3]{x} + \dfrac{x}{\pi}$; в) $y = \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$;

г) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{x}$; д) $y = 3\sin x - 4\cos x + 8\sqrt{x}$; е) $y = e^x ctgx$.

Тема 3.3. Производная сложной функции

Литература: [1, с. 226–249; 2, с. 99–105; 3, с. 178-194; 8, т. 1, с. 151–161].

Производная сложной функции. Логарифмическая производная функции. Дифференцирование неявных функций и функций, заданных параметрически.

Основные понятия и определения

Теорема 3.2. *Если* $y = f(z)$ *и* $z = \varphi(x)$ *– дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции* $y = f(\varphi(x))$ *существует и равна производной данной функции* y *по промежуточному аргументу* z*, умноженной на производную самого промежуточного аргумента* z *по независимой переменной* x*, т.е.*

$$y_x' = y_z' \cdot z_x'.$$

Пусть $y = \ln z$, где $z = g(x)$. Тогда, применяя формулу дифференцирования сложной функции, получим $y_x' = (\ln z)_x' = (\ln z)_z' \cdot z_x'$, или $y_x' = \frac{1}{z} \cdot z_x'$.

Таким образом, имеем

$$(\ln z)_x' = \frac{z'}{z}.$$

Производная от логарифмической функции называется ***логарифмической*** производной функции.

Пример 3.3.1. Найти производную функции y, заданную уравнением $x^2 - xy + \ln y + 2 = 0$ и вычислить ее значение в точке $(2;1)$.

Решение. Дифференцируя обе части данного равенства и учитывая, что y есть функция от x, получим $2x - y - xy' + \frac{y'}{y} = 0$, откуда, выражая y', будем иметь

$$y' = \frac{2xy - y^2}{xy - 1}.$$

Значение производной при $x = 2,\ y = 1,\ y'(2) = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1 - 1^2}{2 \cdot 1 - 1} = 3$.►

Пример 3.3.2. Найти производные следующих функций:

$$1)\ y = arctg\frac{2}{x}; \quad 2)\ y = \arcsin\frac{2x^2}{1 + x^4}, \quad -1 < x < 1; \quad 3)\ y = arcctg\frac{\ln x}{3}.$$

Решение. 1). Используя формулу производной сложной функции получаем:

$$y' = \left(arctg\frac{2}{x}\right)' = \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)' = \frac{1}{1 + \frac{4}{x^2}} \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right) = -\frac{x^2}{x^2 + 4} \cdot \frac{2}{x^2} = -\frac{2}{x^2 + 4}.$$

2). Используя формулу производной сложной функции получаем

$$y' = \left(\arcsin\frac{2x^2}{1 + x^4}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x^2}{1 + x^4}\right)^2}}\left(\frac{2x^2}{1 + x^4}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x^2}{1 + x^4}\right)^2}} \times$$

$$\times \frac{(1 + x^4)4x - 2x^2 \cdot 4x^3}{(1 + x^4)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x^4 + x^8}} \cdot \frac{4x(1 - x^4)}{1 + x^4} = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^4)^2}} \cdot \frac{4x(1 - x^4)}{1 + x^4} =$$

$$= \frac{1}{1-x^4} \cdot \frac{4x\left(1-x^4\right)}{1+x^4} = \frac{4x}{1+x^4}.$$

Заметим, что $\sqrt{\left(1-x^4\right)^2} = \left|1-x^4\right| = 1-x^4$, так как $-1 < x < 1$.

3) Используя формулу производной сложной функции получаем:

$$y' = \left(arcctg\,\frac{\ln x}{3}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{\ln x}{3}\right)^2} \cdot \left(\frac{\ln x}{3}\right)' = \frac{9}{9+\ln^2 x} \cdot \frac{1}{3x} = \frac{3}{x\left(9+\ln^2 x\right)}. \ ▶$$

Теорема 3.3. *Если функция y аргумента x задана параметрически $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы и $\varphi'(t) \neq 0$, то производная этой функции есть*

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Упражнение 1. Для следующих функций найдите y':

а) $y = (3x+2)e^{2x}$; б) $y = \dfrac{2+e^{3x}}{2-e^{3x}}$; в) $y = (x+1)^5$;

г) $y = \sqrt{4-x}$; д) $y = \cos^3 x$; е) $y = (3x+2)e^{2x}$;

ж) $y = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$; з) $y = tg^3 2x$; к) $y = arcctg\,\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Упражнение 2. Для функции $y = 4\sqrt{1+\cos^2 3x^2}$ найдите $y'\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right)$.

Упражнение 3. Для функции $y = x\,arctg\,\dfrac{x}{4} - 2\ln\left(x^2+16\right)$ найдите $y'(0)$.

Упражнение 4. Определите угол наклона касательной к графику функции $f(x) = arctg\,\dfrac{x}{2} - \ln\sqrt[4]{x^4-16}$, проведенной в точке $x_0 = 4$.

Тема 3.4. Монотонность и экстремумы функции одной переменной

Литература: [1, с. 258–291; 2, с. 112–129; 3, с. 209–234; 8, т. 1, с. 174–182].

Основные теоремы дифференциального исчисления и следствия из них. Возрастание и убывание функции. Необходимое и достаточное условие возрастания (убывания) функции на множестве.

Критические точки. Точки максимума и минимума. Необходимое и достаточное условие экстремума функции. Экстремум функции.

Основные понятия и определения

Функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на некотором интервале, если для любых точек $x_1 < x_2$ из этого интервала $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Теорема 3.4 (Необходимое условие возрастания (убывания) функции). *Если дифференцируемая на (a,b) функция $f(x)$ возрастает (убывает), то ее производная $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для $\forall x \in (a;b)$.*

Теорема 3.5 (Достаточное условие возрастания (убывания) функции). *Если непрерывная на $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет положительную (отрицательную) производную $f'(x)$ на (a,b), то эта функция возрастает (убывает) на $[a,b]$.*

Пример 3.4.1. Найти интервалы монотонности функции $y = x^2 - 4x + 3$.

Решение. $y' = 2x - 4$. Очевидно, что $y' > 0$ при $x > 2$ и $y' < 0$ при $x < 2$, т.е. функция убывает на интервале $(-\infty;2)$ и возрастает на интервале $(2;+\infty)$, где $x_0 = 2$ – абсцисса вершины параболы. ►

Функция $y = f(x)$ имеет в точке c максимум (минимум), если существует такая окрестность U точки c, что для $\forall x \neq c$, $x \in U$, выполняется неравенство $f(x) < f(c)$ ($f(x) > f(c)$).

Теорема 3.6. (***Необходимый признак существования экстремума функции***) *В точке экстремума непрерывной функции производная дифференцируемой функции равна нулю.*

Критическими (или ***стационарными***) называются точки, в которых выполнен необходимый признак существования экстремума, т.е. производная либо равна нулю или не существует.

Пример 3.4.2. Найти критические точки функции $y = \sqrt[3]{x-1}$ и убедиться в наличии или отсутствии экстремума в этих точках.

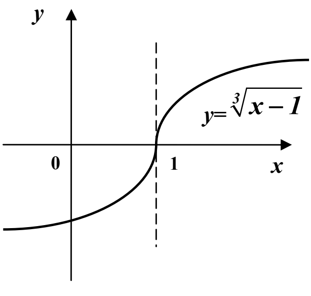

Рис. 10

Решение. Функция $y = \sqrt[3]{x-1}$ также возрастает на всей числовой оси. Производная $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ при $x = 1$ не существует, т.е. $y'(1) = \infty$, но экстремума в этой точке нет (рис. 10). ►

Теорема 3.7. (*Первый достаточный признак существования экстремума*) *Если непрерывная функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ во всех точках некоторого интервала, содержащего критическую точку **c** (за исключением, может быть, самой точки **c**), и если $f'(x)$ при переходе аргумента слева направо через точку **c** меняет знак с "+" на "−", то функция имеет в этой точке максимум, а при перемене знака с "−" на "+" − минимум.*

Теорема 3.8. (*Второй достаточный признак существования экстремума*) *Если в критической точке **c** функция $f(x)$ дважды дифференцируема и если $f''(x)<0$, то точка **c** есть точка максимума функции $f(x)$, а если $f''(x)>0$, то точка **c** − точка минимума.*

Упражнение 1. Найдите интервалы монотонности функции:

а) $y=-\dfrac{x^3}{3}+x^2+3x-4$; б) $y=\dfrac{x^3}{3}-9x-\dfrac{1}{3}$; в) $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-6x$;

г) $y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-6x+1$; д) $y=-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}-12$; е) $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}-3x^2$;

ж) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$; з) $y=\dfrac{e^x}{x}$; и) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$;

к) $y=\dfrac{3-2x}{(x-2)^2}$; л) $y=x\sqrt{1-x}$; м) $y=\dfrac{e^x}{4(1-x)}$.

Упражнение 2. Найдите экстремумы функции:

а) $y=-\dfrac{x^3}{3}+x^2+3x-4$; б) $y=-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}-12$;

в) $y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-6x+1$; г) $y=\dfrac{x^4}{4}-x^3+x^2+1$;

д) $y=-\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{2x^3}{3}$; е) $y=-x^4+6x^3-8x^2$;

ж) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$; з) $y=\dfrac{x}{4-x^2}$;

и) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$; к) $y=x^2e^{-x}$.

Тема 3.5. Выпуклость и точки перегиба функции одной переменной

Литература: [1, с. 258–291; 2, с. 112–129; 3, с. 209–234; 8, т. 1, с. 174–182].

Понятие выпуклости. Необходимое и достаточное условие выпуклости функции на множестве. Точки перегиба.

Основные понятия и определения

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым вверх (вниз)*** на $(a; b)$ (можно говорить соответственно ***выпуклым*** (***вогнутым***)), если он расположен ниже (выше) любой своей касательной на этом интервале.

Теорема 3.10. *Пусть функция $y = f(x)$ имеет $f''(x)$ на $(a; b)$. Если для любого $x \in (a; b)$ $f''(x) < 0$, то график функции $f(x)$ на $(a; b)$* ***выпуклый вверх (выпуклый)****, а если $f''(x) > 0$ – то* ***выпуклый вниз (вогнутый)****.*

Точка графика непрерывной функции, отделяющая его выпуклую вверх часть от выпуклой вниз части (выпуклую часть от вогнутой части), называется ***точкой перегиба.***

Теорема 3.11. **(***Необходимый признак существования точки перегиба***).** *В точке перегиба x_0 графика функции $f(x)$ вторая производная $f''(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует.*

Точки, в которых $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует, называются ***критическими*** точками второго рода.

Теорема 3.11. **(***Достаточный признак существования точки перегиба***).** *Если функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0 и $f''(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак на противоположный, то точка $(x_0; f(x_0))$ – точка перегиба графика функции $f(x)$.*

Пример 3.5.1. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y = \dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$.

Решение. Сначала вычисляем первую производную $y' = \dfrac{x^2(x-3)}{2(x-1)^3}$. Затем находим вторую производную $y'' = \dfrac{3x}{(x-1)^4}$.

Найдем точки, в которых выполнено необходимое условие существования точек перегиба.

$y'' = 0 \Leftrightarrow 3x = 0$, откуда $x_1 = 0$.

y'' не существует при условии $(x-1)^4 = 0$, откуда находим $x_2 = 1$. Следовательно, x_1 и x_2 – точки подозрительные на перегиб.

3. Исследуем знак второй производной в окрестности этих точек. Удобно при исследовании использовать таблицу.

Таблица 2 – Промежутки выпуклости функции $y = \dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
$y''(x)$	–	0	+	не сущ.	+
$y(x)$	$\cap$	0	$\cup$	не сущ.	$\cup$
		перегиб			

Знаки " + " и " – " означают положительность и отрицательность второй производной на соответствующем интервале. Символы $\cap$ и $\cup$ означают выпуклость вверх (*выпуклость*) и вниз (*вогнутость*) графика функции на соответствующем интервале. Итак, график исследуемой функции выпуклый вверх на интервале $(-\infty;0)$ и выпуклый вниз на интервалах $(0;1)$ и $(1;+\infty)$. Точка перегиба $x=0$. $y_{пер}(0)=0$.►

Упражнение 1. Определите промежутки выпуклости и точки перегиба функции:

а) $y=-x^4+6x^3-12x^2$; б) $y=x^4-6x^3+12x^2-x$;

в) $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-x$; г) $y=\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{7x^4}{4}+2x^3+1$;

д) $y=-\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{2x^3}{3}-3$; е) $y=-\dfrac{x^5}{5}+2x^4-\dfrac{7x^3}{3}+x$;

ж) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$; з) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$;

и) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$; к) $y=\dfrac{6\sqrt{x}}{x+2}$.

Тема 3.6. Исследование свойств функции и построение графика

Литература: [1, с. 258–291; 2, с. 112–129; 3, с. 209–234; 8, т. 1, с. 174–182].

Правила Лопиталя раскрытия неопределенностей.

Общий план исследования функции и построения графика функции.

Основные понятия и определения

Теорема 3.12. (Ферма) *Если функция $f(x)$, определенная на $(a;b)$, принимает в некоторой точке $c\in(a;b)$ наибольшее или наименьшее значение и существует $\boldsymbol{f'(c)}$, то $\boldsymbol{f'(c)=0}$.*

Геометрический смысл теоремы заключается в том, что внутри интервала $\boldsymbol{(a,b)}$ в точке $\boldsymbol{c}$ – наибольшего или наименьшего значения касательная к графику функции в точке $\boldsymbol{(c,f(c))}$ параллельна оси $\boldsymbol{Ox}$.

Теорема 3.13. ***(Ролля)*** *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a;b]$, *дифференцируема на* $(a;b)$ *и* $f(a)=f(b)=0$, *то существует такая точка* $c\in(a;b)$, *что* $f'(c)=0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля: у функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы, всегда существует внутренняя точка, в которой касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.

Теорема 3.14. (Лагранжа) *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a;b]$ *и дифференцируема на* $(a;b)$, *то существует такая точка* $c\in(a;b)$, *что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Геометрический смысл теоремы такой: у функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы, всегда существует такая точка $c\in(a;b)$, что касательная к графику функции в точке $(c,f(c))$ параллельна хорде AB, соединяющей концевые точки графика.

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-k\cdot x]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{2(x-1)^2}-\frac{1}{2}\cdot x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x^2-x}{2(x-1)^2}\right]=\left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle=$$

Теорема 3.15. ***(Правило Лопиталя)*** *Пусть функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки* ***a*** *(кроме, может быть, самой точки* ***a****), причем* $\varphi'(x)\neq 0$. *Кроме того* $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ *(или* $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$*). Тогда, если существует предел отношения производных этих функций, то* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Пример 3.6.1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}=\left\langle\dfrac{0}{0}\right\rangle=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 4x)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin 4x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 4x}{x}$.

Так как неопределенность осталась, применяем правило Лопиталя еще раз.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 4x}{x}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 4x)'}{x'}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4\cos 4x}{1}=2\cdot 4=8.\blacktriangleright$$

Пример 3.6.2. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left[\dfrac{1}{\cos x}-tgx\right]$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left[\frac{1}{\cos x}-tgx\right]=\langle\infty-\infty\rangle=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left[\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1-\sin x}{\cos x}=$

$$=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{(1-\sin x)'}{(\cos x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.\ ►$$

Неопределенности вида $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$ приводятся к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ с помощью тождества $\boldsymbol{f(x)^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\cdot ln\, f(x)}}$.

Пример 3.6.3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Воспользуемся формулой: $\boldsymbol{a^{log_a x}=x}$. Тогда:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}=\left\langle\infty^0\right\rangle=\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}\ln(1+x^2)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}};$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}=\left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln\left(1+x^2\right)\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1}=\left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2x}=0$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}=e^0=1.$►

Пример 3.6.4. Исследовать функцию $y=\frac{x}{x^2+1}$ и построить ее график.

Решение. Для построения графика исследуем свойства функции согласно приведенной схеме:

1. Область определения функции – вся числовая прямая.
2. Решая уравнение $f(x)=0$, получаем, что $x=0$. Таким образом функция проходит через начало координат.
3. Функция непрерывна на всей числовой прямой и, следовательно, не имеет вертикальных асимптот.
4. Определим наклонные асимптоты функции $y=ax+b$, где

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2+1}=0;\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{x^2+1}-0\cdot x\right]=0,$$

т.е. $y=0$ – горизонтальная асимптота.

5. Функция нечетная, т.к. $f(-x)=f(x)$, и ее график симметричен относительно начало координат.

6. Экстремумы и интервалы монотонности. Вычислим первую производную

$$y' = \frac{1 + x^2 - 2x^2}{\left(1 + x^2\right)^2} = \frac{1 - x^2}{\left(1 + x^2\right)^2};$$

$y' = 0$ при $x = \pm 1$ (рис. 11). Исследуем характер этих критических точек.

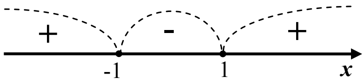

Рис. 11 – Знаки первой производной из примера 3.6.4

Как видно функция возрастает на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$; убывает на интервале $(-1; 1)$. Следовательно, функция при $x = -1$ имеет максимум $f(-1) = -0{,}5$ и при $x = 1$ имеет минимум $f(1) = 0{,}5$.

7. Интервалы выпуклости и точки перегиба. Найдем вторую производную

$$y'' = \frac{-2x\left(1 + x^2\right)^2 - 4x\left(1 - x^2\right)\left(1 + x^2\right)}{\left(1 + x^2\right)^4} = \frac{2x\left(x^2 - 3\right)}{\left(1 + x^2\right)^3};$$

$y'' = 0$ при $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$. Исследуем знак y'' (рис. 12) вблизи этих точек.

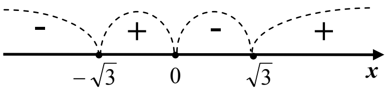

Рис. 12 – Знаки второй производной из примера 3.6.4

Следовательно, точками перегиба графика данной функции будут следующие точки (рис. 13): $(0; 0), \left(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right), \left(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

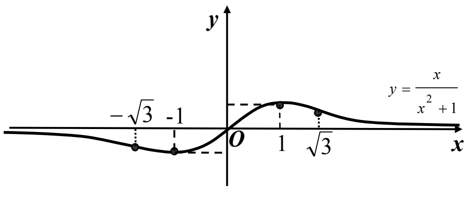

Рис. 13 – График функции из примера 3.6.4

Отмечаем в системе координат характерные точки и строим график функции. ►

Пример 3.6.5. Исследовать функцию $y = \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2}$ и построить ее график.

Решение. Для построения графика исследуем свойства функции согласно схемы:

1. Поскольку данная функция представляет собой рациональную дробь, то она определена и непрерывна всюду на бесконечной прямой, кроме точки $x=0$, в которой обращается в ноль знаменатель. Поэтому область определения функции $(-\infty;\,0)\cup(0;\,+\infty)$.

2. Решение уравнения $y=0$ представляет для данной функции сложность, так как кубическое уравнение $2x^3-5x^2+14x-6=0$ не имеет рациональных корней.

3. Выясним вопрос о существовании наклонных асимптот. Очевидно, что

$$\lim_{x\to 0\pm 0}\frac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^2}=-\infty,$$

поэтому график функции имеет вертикальную асимптоту $x=0$.

4. Определим наклонную асимптоту. Для этого вычислим

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{14}{x^2}-\dfrac{6}{x^3}}{4}=\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\bigl(f(x)-ax\bigr)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-5x^2+14x-6-2x^3}{4x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-5x^2+14x-6}{4x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-5+\dfrac{14}{x}-\dfrac{6}{x^2}}{4}=-\frac{5}{4}.$$

Из этого следует, что прямая $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{5}{4}$ является наклонной асимптотой для графика данной функции.

5. Функция не является четной и нечетной, т.к. $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$. Поэтому функция общего вида.

6. Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции. Так как

$$y'=\left(\frac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^3}\right)'=\frac{x^3-7x+6}{2x^3}=\frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{2x^3},$$

поэтому критическими точками являются точки:

$$x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=-3,\ x_4=0.$$

Исследуем знак второй производной вблизи найденных точек (рис. 14).

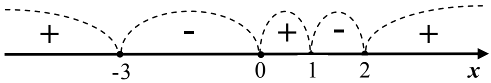

Рис. 14 – Знаки первой производной из примера 3.6.5

Согласно теореме о достаточном условии монотонности функция возрастает на $(-\infty;-3)\cup(0;\,1)\cup(2;+\infty)$ и убывает на $(-3;\,0)\cup(1;\,2)$. Таким образом функция при $x=1$ и $x=-3$ имеет максимумы, соответственно равные $f(1)=\frac{5}{4}=1{,}25$, $f(-3)=-\frac{49}{12}\approx-4{,}1$ и при $x=2$ имеет минимум $f(2)=\frac{9}{8}=1{,}125$.

7. Интервалы выпуклости и точки перегиба. Найдем вторую производную:

$$y''=\left(\frac{x^3-7x+6}{2x^3}\right)'=\frac{2x^3\left(3x^2-7\right)-\left(x^3-7x+6\right)\cdot 6x^2}{2x^3}=\frac{7x-9}{x^4}.$$

Тогда $y''=0$ при $x=1\frac{2}{7}$ и в точке $x=0$ вторая производная не существует. Найдем знак y'' вблизи этих точек (рис. 14).

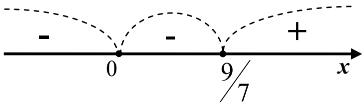

Рис. 15 – Знаки второй производной из примера 3.6.5

Таким образом, функция выпукла вверх на интервалах $(-\infty;\,0)\cup$ $\cup\left(0;1\frac{2}{7}\right)$, выпукла вниз на интервале $\left(1\frac{2}{7};+\infty\right)$. Так как $f\left(1\frac{2}{7}\right)=\frac{913}{756}\approx\ \approx1{,}21$, то точкой перегиба графика функции является точка.

Отмечаем (рис. 16) в системе координат характерные точки. Наносим асимптоты и строим график функции. ►

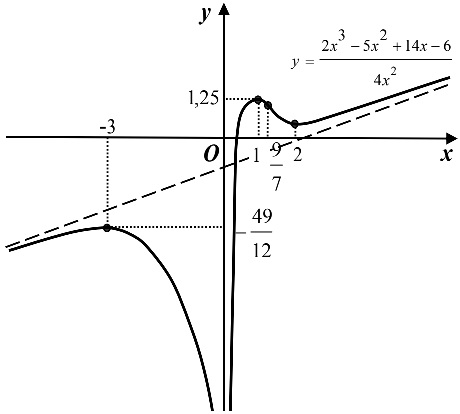

Рисунок 16 – График функции из примера 3.6.5

Упражнение 1. Вычислите предел функции, используя *правило Лопиталя*:

а) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{2-x}}{2x^2 - x - 6}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos 4x}{x \sin x}$; в) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4 - 4x + 3}{x^5 - 5x + 4}$;

г) $\lim\limits_{x \to -8} \frac{\sqrt{9-2x} - 5}{\sqrt[3]{x} + 2}$; д) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos 6x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}$;

ж) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$; з) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x^2 + 3x - 10}$; и) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{e^x + e^{-x} - 2}$;

к) $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x$; л) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x-1)}{ctg \pi x}$; м) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x-1} \right)$.

Упражнение 2. Проведите полное исследование и постройте график функции:

а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$; б) $y = -x^4 + 6x^3 - 12x^2$; в) $y = \frac{x+2}{1-x}$;

г) $y = \frac{x^2}{x+1}$; д) $y = \frac{x^2}{1-x}$; е) $y = \frac{x^2}{1-x^2}$;

ж) $y = \frac{x}{4-x^2}$; з) $y = \frac{x}{x^2-1}$; и) $y = \frac{1}{1-x^2}$;

к) $y = \sqrt{1-x^2}$; л) $y = \sqrt{1-\ln^2 x}$; м) $y = \frac{1}{\cos x}$.

Раздел 4. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

Тема 4.1. Частные производные функции нескольких переменных

Литература: [1, с. 226–249; 2, с. 99–105; 3, с. 178-194; 8, т. 1, с. 151–161].

Функции нескольких переменных. Область определения. Предел функции. Непрерывность. Некоторые понятия топологии.

Частные производные. Полный дифференциал, его связь с частными производными. Инвариантность формы полного дифференциала. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала. Формула Тейлора.

Основные понятия и определения

Пусть функция f задана в некоторой окрестности точки $x^0 = \left(x_1{}^0, x_2{}^0, \ldots, x_n{}^0\right)$ из пространства R^n. Зафиксируем значения переменных $x_2, \ldots, x_n : x_2 = x_2{}^0, \ldots, x_n = x_n{}^0$ и получим функцию одной переменной

$$g(x_1) = f\left(x_1, x_2{}^0, \ldots, x_n{}^0\right).$$

Если существует производная $g(x_1)$ в точке $x_1{}^0$, то она называется *частной производной* функции f в точке $\left(x_1{}^0, x_2{}^0, \ldots, x_n{}^0\right)$ по переменной x_1 и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1{}^0, \ldots, x_n{}^0\right)$, или $f'_{x_1}\left(x_1{}^0, \ldots, x_n{}^0\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1{}^0, \ldots, x_n{}^0\right) = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f\left(x_1{}^0 + \Delta x_1, x_2{}^0, \ldots, x_n{}^0\right) - f\left(x_1{}^0, x_2{}^0, \ldots, x_n{}^0\right)}{\Delta x_1}. \qquad (4.1)$$

Выражение в числителе (4.1) называется *частным приращением* функции и обозначается $\Delta_{x_1} f$.

Пример 4.1.1. Для функций 1) $z(x, y) = 2x + y^2\sqrt{x}$; 2) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ вычислите частные производные первого порядка.

Решение. 1). При вычислении частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ переменная y считается постоянной, а при вычислении частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ постоянной считается переменная x. Применяя соответствующие формулы дифференцирования, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}(z(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x + \sqrt{x} \cdot y^2\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + y^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x}\right) = 2 + \frac{y^2}{2\sqrt{x}};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(z(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x + \sqrt{x} \cdot y^2\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2x) + \sqrt{x} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\right) = 0 + 2y\sqrt{x} = 2y\sqrt{x}.$$

2). Применяя соответствующие формулы дифференцирования, получаем

$$\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{(xy)'_x\cdot\left(x^2+y^2\right)-\left(x^2+y^2\right)'_x\cdot(xy)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y\cdot\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot(xy)}{\left(x^2+y^2\right)^2} =$$

$$= \frac{y\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{(xy)'_y\cdot\left(x^2+y^2\right)-\left(x^2+y^2\right)'_y\cdot(xy)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x\cdot\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot(xy)}{\left(x^2+y^2\right)^2} =$$

$$= -\frac{x\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}. \blacktriangleright$$

Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $M^0=\left(x^0,y^0\right)$. Рассмотрим точку $M=(x,y)$ из этой окрестности (рис. 17). Если обозначить $\Delta x = x - x^0$, $\Delta y = y - y^0$, то имеем

$$\Delta f\left(x^0,y^0\right) = f\left(x^0+\Delta x, y^0+\Delta y\right) - f\left(x^0,y^0\right),$$

где $\Delta f\left(x^0,y^0\right)$ – *полное приращение функции* $f(x,y)$ в точке $\left(x^0,y^0\right)$.

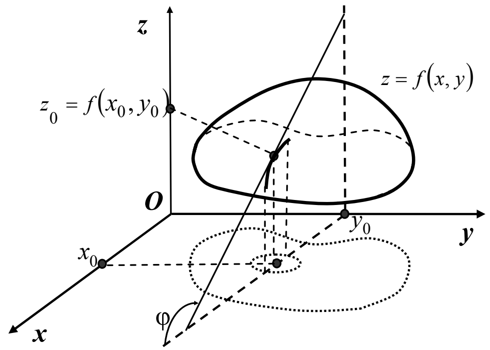

Рис. 17 – Геометрический смысл частных производных

По определению дифференциал независимой переменной $\Delta x_i = dx_i$, поэтому выражение для полного дифференциала имеет вид

$$df\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)\cdot dx_i\,.$$

Вектор $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(M^0\right);\ldots;\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(M^0\right)\right)$ называется *градиентом* функции f в точке M^0 и обозначается $grad\, f\left(M^0\right)$.

Если существует $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ – частная производная функции $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ по переменной x_j в точке x^0, то она называется частной производной второго порядка функции f в этой точке и обозначается

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\left(x_1{}^0,\ldots,x_n{}^0\right), \text{ или } f''_{x_i x_j}\left(x_1{}^0,\ldots,x_n{}^0\right).$$

Если $i = j$, то частная производная второго порядка обозначается

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i{}^2}\left(x_1{}^0,\ldots,x_n{}^0\right), \text{ или } f''_{x_i x_i}\left(x_1{}^0,\ldots,x_n{}^0\right).$$

Пример 4.1.2. Для функции $z(x,y) = 2x + y^2\sqrt{x}$ вычислите частные производные второго порядка.

Решение. Заметим, что частные производные первого порядка уже вычислены (см. пример 4.1.1). Вычислим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2 + \frac{y^2}{2\sqrt{x}}\right) = 0 + \frac{y^2}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{y^2}{4\sqrt{x^3}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2y\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(y) = 2\sqrt{x}.$$

Заметим, что смешанные производные равны:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2 + \frac{y^2}{2\sqrt{x}}\right) = 0 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\right) = \frac{y}{\sqrt{x}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y\sqrt{x}\right) = 2y\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{2y}{2\sqrt{x}} = \frac{y}{\sqrt{x}}. \ ►$$

Теорема 4.1. *Пусть функция двух переменных $f(x,y)$ определена вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ в некоторой окрестности точки $\left(x^0, y^0\right)$, причем частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ непрерывны в $\left(x^0, y^0\right)$, тогда*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(x^0, y^0\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(x^0, y^0\right).$$

Дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) $d^2 f(x)$ функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется дифференциал от ее дифференциала, т.е.

$$d^2 f(x) = d\left[df(x)\right].$$

Для случая двух независимых переменных (при условии непрерывности частных производных) справедлива формула

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 .$$

Теорема 4.2. *Пусть функции* $g(t)$ *и* $h(t)$ *дифференцируемы в точке* t^0. *Обозначим* $x^0 = g(t^0)$, $y^0 = h(t^0)$. *Если функция двух переменных* $z = f(x, y)$ *дифференцируема в точке* (x^0, y^0), *то сложная функция* $z = f(g(t), h(t))$ *имеет в точке* t^0 *производную, которая вычисляется по формуле:*

$$\frac{dz}{dt}(t^0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0) \cdot \frac{dg}{dt}(t^0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) \cdot \frac{dh}{dt}(t^0)$$

или в более короткой форме записи

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dg}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dh}{dt} .$$

Упражнение 1. Для следующих функций определите частные производные первого порядка и градиент в точке (1; –1):

а) $z(x, y) = 5x + y^3\sqrt{x}$; б) $z(x, y) = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x}}{y}$; в) $z(x, y) = \frac{y}{\sqrt[3]{x}} + \frac{\sqrt{x}}{y^2}$;

г) $z(x, y) = y\cos x + \frac{\sqrt{x}}{y^3}$; д) $f(x, y) = \frac{\arcsin y}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1 - \sqrt{x}}{y^2}$.

Упражнение 2. Для следующих функций определите частные производные первого и второго порядка:

а) $z(x, y) = 4x + y\sqrt{x}$; б) $z(x, y) = \frac{y}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{y}$; в) $z(x, y) = \frac{y^2}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{\sqrt{x}}{y^2}$;

г) $z(x, y) = y\cos^2 x + \frac{\sqrt{x}}{y^3}$; д) $f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt[3]{x}} + \frac{\sqrt{x}}{y^2} + z^2 x$.

Упражнение 3. Для следующих функций определите полный дифференциал первого и второго порядка:

а) $z(x, y) = \frac{y^3}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{\sqrt{x}}{y}$; б) $z(x, y) = \cos^2\frac{x}{y} + \sqrt{1 - xy}$;

в) $z(x, y) = arctg\frac{y}{x} + x\sqrt{1 + y^2}$; г) $f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt[4]{x}} + \frac{\sqrt{x}}{y} + z^3 x$.

Тема 4.2. Экстремум функции нескольких переменных

Литература: [1, с. 226–249; 2, с. 99–105; 3, с. 178-194; 8, т. 1, с. 151–161].

Экстремумы функции нескольких переменных Необходимое условие экстремума. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Примеры применений при поиске оптимальных решений.

Основные понятия и определения

Пусть функция f определена на множестве $D \in R^n$, точка x^0 – внутренняя точка этого множества.

1) Точка x^0 называется точкой *максимума* [*минимума*] функции f, если существует такая ε-окрестность $O_\varepsilon(x^0) \subset D$, что для всех $x \in O_\varepsilon(x^0)$ выполняется неравенство

$$f(x) \le f(x^0), \tag{4.2}$$

$$[f(x) \ge f(x^0)]. \tag{4.3}$$

Теорема 4.4 (***необходимое условие экстремума***)**.** *Пусть функция* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *определена в некоторой окрестности точки* $x^0 = (x_1{}^0, \ldots, x_n{}^0) \in R^n$. *Предположим, что* x^0 *– точка экстремума функции f. Пусть в точке* x^0 *существует производная функции* f *по переменной* x_i. *Тогда*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = 0.$$

Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет в некоторой точке $x^0 = (x_1{}^0, \ldots, x_n{}^0) \in R^n$ частные производные функции f по всем переменным, то градиент данной функции в этой точке равен нулю

$$grad\ f(x^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0); \ldots; \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\right) = (0, \ldots, 0) \tag{4.4}$$

Точка x^0, в которой выполняется условие (4.4), называется *стационарной* точкой функции.

Пример 4.2.1. Исследовать на экстремум функцию $z(x, y) = x^2 - y^2$**.**

Решение. Область определения данной функции, очевидно R^2. Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 - y^2)'_x = 2x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 - y^2)'_y = -2y.$$

Условие (2.33) приводит к системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x = 0, \\ -2y = 0. \end{cases}$$

Проверим в единственной стационарной точке (0;0) достаточное условие экстремума. Для любых точек $\left(0;\frac{\varepsilon}{2}\right)$ и $\left(\frac{\varepsilon}{2};0\right)$, принадлежащих произвольной ε-окрестности точки (0;0) имеем:

$$z\left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right)=-\frac{\varepsilon^2}{4}<0;\quad z\left(\frac{\varepsilon}{2};0\right)=\frac{\varepsilon^2}{4}>0.$$

Так как приращение функции меняет свой знак в окрестности стационарной точки, то данная точка не является точкой экстремума и, следовательно, данная функция экстремумов не имеет. ►

Теорема 4.5 (***достаточное условие строгого экстремума***). *Пусть функция* $f(x_1,\ldots,x_n)$ *определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности стационарной точки* $x^0=\left(x_1{}^0,\ldots,x_n{}^0\right)$. *Тогда для того чтобы точка* x^0 *была точкой строгого максимума* [*строгого минимума*] *функции* f, *достаточно, чтобы функция* f *была строго выпукла вверх* [*вниз*] *в окрестности точки* x^0.

Пример 4.2.2. Найдите экстремум функции $z(x,y)=x^2+xy+y^2-3x-6y$.

Решение. Находим частные производные первого порядка данной функции

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y-3,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x+2y-6.$$

Воспользовавшись необходимыми условиями экстремума, находим стационарные точки из системы уравнений:

$$\begin{cases}2x+y-3=0,\\ x+2y-6=0.\end{cases}$$

Решая данную систему, получаем $x=0,\, y=3$, т.е. точка $M(0;3)$ – стационарная точка.

Проверим достаточные условия. Пусть функция $f(x,y)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности точки $\left(x^0,y^0\right)$. Пусть $\left(x^0,y^0\right)$ – стационарная точка, т.е. $\frac{\partial f}{\partial x}\left(x^0,y^0\right)=\frac{\partial f}{\partial y}\left(x^0,y^0\right)=0$.

Обозначим

$$P=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(x^0,y^0\right),\ Q=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(x^0,y^0\right),\ R=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(x^0,y^0\right),\ \Delta=PQ-R^2.$$

Тогда, если

1) $\Delta>0$, то $\left(x^0,y^0\right)$ – точка экстремума. При этом если $P<0$, то $\left(x^0,y^0\right)$ – точка строго максимума, если $P>0$ – точка строго минимума.

2) $\Delta < 0$, то в точке $\left(x^0, y^0\right)$ функция f экстремума не имеет.

3) $\Delta = 0$, то в точке $\left(x^0, y^0\right)$ функция f может иметь экстремум, а может и не иметь.

Возвращаясь к решению задачи, находим значения частных производных второго порядка в точке M

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M) = P = 2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M) = Q = 2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M) = R = 1$$

и составляем дискриминант $\Delta = 2\cdot 2 - 1^2 = 3 > 0;\quad 2 > 0$. Следовательно, в точке $M(0;3)$ заданная функция имеет строгий минимум. Вычисляем значение функции в этой точке

$$z_{\min}(0;3) = 0^2 + 0\cdot 3 + 3^2 - 3\cdot 0 - 6\cdot 3 = -9\ .\ \blacktriangleright$$

Рассмотрим функцию f, определенную на множестве $D \in R^n$, и множество $E \in D$. Пусть точка $x^0 = \left(x_1{}^0, \ldots x_n{}^0\right) \in E$.

1). Точку x^0 будем называть *точкой максимума* [*минимума*] функции f *относительно* множества E, если существует такая ε-окрестность $O_\varepsilon\left(x^0\right)$, что

$$f(x) \le f\left(x^0\right), \left[f(x) \ge f\left(x^0\right)\right], \qquad (4.5)$$

для всех $x \in O_\varepsilon\left(x^0\right) \bigcap E$, т.е. в x^0 – точке максимума [минимума] относительно множества E функция принимает значение не меньшее [не большее], чем во всех точках x из E, достаточно близких к точке x^0.

2) Точку x^0 будем называть точкой *строгого максимума [строгого минимума]* функции f *относительно* множества E, если существует такая выколотая ε-окрестность $U_\varepsilon\left(x^0\right)$, что условие (4.5) выполняется как строгое неравенство для всех $x \in O_\varepsilon\left(x^0\right) \bigcap E$.

Точки [строгого] максимума и точки [строгого] минимума функции f относительно множества E называют *точками* [*строгого*] *экстремума относительно* множества E. Если точка экстремума функции f относительно множества E является внутренней точкой E, то, очевидно, эта точка – точка обычного экстремума функции f.

Пример 4.2.3. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Решение. Область определения этой функции есть, очевидно R^2. Графиком этой поверхности является парабалоид вращения (рис. 18) (сечениями этой поверхности плоскостями, параллельными плоскости Oxy, будут окружности с центром в начале координат). Очевидно, что точка (0;0) будет единственной точкой строго минимума (этот факт можно установить непосредственно, решая систему (4.4) и проверяя достаточное условие). Рассмотрим теперь множество

$E=\{(x,y)\in R^2 | x+y\geq 1\}$ (рис. 19). Покажем, что в данном случае функция f относительно множества E так же будет иметь точку строго минимума, но другую. Рассмотрим произвольную выколотую ε-окрестность точки $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ (аналитический способ определения условного экстремума рассмотрен в примере 4.2.4). Легко заметить, что начало координат не принадлежит множеству E, в тоже время любая точка $M'(x';y')\in E$ расположена на линии уровня, соответствующей большему значению константы C.

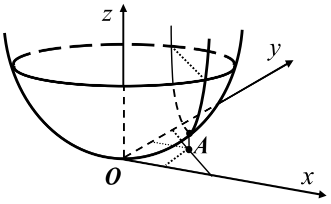

Рис. 18 – График функции из примера 4.2.3

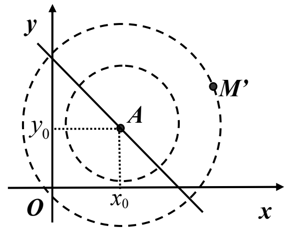

Рис. 19 – Линии уровня поверхности из примера 4.2.3

В силу симметрии переменных точка A является ближайшей к началу координат, следовательно, является точкой строгого минимума относительно множества E. ►

Точки экстремума функции относительно некоторого множества называют точками *относительного экстремума,* или *условного экстремума* функции.

Задачу нахождения условного экстремума рассмотрим для частного случая функции двух переменных $f(x,y)$, определенной на $D\in R^2$, при условии, что множество $E=\{(x,y)\in D | g(x,y)=0\}$, где $g(x,y)$ – некоторая функция, определенная на D. Уравнение $g(x,y)=0$ называется в данной задаче уравнением связи. Рассмотрим один из способов решения этой задачи на следующем примере.

Пример 4.2.4. Найти экстремум функции $f(x,y)=x^2+y^2$ при условии $x+y=1$.

Решение. Запишем уравнение связи $g(x,y)$ в виде $x+y-1=0$. На рисунках 18 и 19 изображены график функции $f(x,y)$ и линия уровня функции $g(x,y)$, соответствующая $g(x,y)=0$. Найдем экстремум функции относительно множества $E=\{(x,y)\in R^2 | x+y-1=0\}$.

Из уравнения связи выразим одну переменную через другую и получим функцию одной переменной

$$u(x,1-x)=x^2+(1-x)^2=2x^2-2x+1.$$

Функция $u(x)$ зависит только от одной переменной, поэтому, вычисляя производную, определяем точки её экстремума

$$u(x)'=\left(2x^2-2x+1\right)'=4x-2,\quad 4x-2=0\Leftrightarrow x^0=\frac{1}{2},\quad u(x)''=4.$$

Так как вторая производная положительна, то имеем для функции $u(x)$ строгий минимум. Подставляя найденное значение x^0 в уравнение связи, находим координаты точки условного минимума $y^0=1-x^0=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Таким образом, функция $f(x,y)=x^2+y^2$ имеет строгий минимум относительно множества $x+y=1$ в точке $\left(x^0,y^0\right)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, равный $u\left(x^0,y^0\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$. ►

Теорема 4.6 (***Необходимое условие относительного экстремума***). *Пусть функции f и g определены и имеют непрерывные частные производные на множестве $D\in R^n$. Предположим, что множество $E=\{x=(x_1,\dots,x_n)\in D|g(x_1,\dots,x_n)=0\}$ не пусто. Пусть точка $x^0=\left(x_1{}^0,\dots,x_n{}^0\right)$ является точкой условного экстремума функции f при уравнении связи*

$$g(x_1,\dots,x_n) \tag{4.6}$$

при этом $grad\left(x^0\right)\neq\overline{0}=(0,\dots,0)$. Тогда существует такое число λ^0, что справедливы равенства:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_i}\left(x_1{}^0,\dots,x_n{}^0,\lambda^0\right)=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\lambda}\left(x_1{}^0,\dots,x_n{}^0,\lambda^0\right)=0.\end{cases}, \tag{4.7}$$

при $1\leq i\leq n$ т.е. точка $\left(x_1{}^0,\dots,x_n{}^0,\lambda^0\right)$ является стационарной точкой функции Лагранжа.

Теорема 4.7. *Пусть точка $\left(x^0,y^0,\lambda^0\right)$ является стационарной точкой функции Лагранжа $\Phi(x,y,\lambda)$. Предположим, что в окрестности точки $\left(x^0,y^0\right)$ существуют непрерывные производные второго порядка функций f и g. Обозначим*

$$P=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\left(x^0,y^0,\lambda^0\right),\quad Q=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\left(x^0,y^0,\lambda^0\right),\quad R=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\left(x^0,y^0,\lambda^0\right).$$

Тогда, если $PQ-R^2>0$, *то точка* $\left(x^0,y^0\right)$ *– точка строгого условного экстремума функции* $f\left(x,y\right)$ *при уравнении связи* (4.6), *при этом, если* $P>0$, *то* $\left(x^0,y^0\right)$ *– точка строгого условного минимума, если* $P<0$, *то* $\left(x^0,y^0\right)$ *– точка строгого условного максимума.*

Упражнение 1. Исследовать на экстремум функцию $z(x,y)=xy^2(1-x-y)$.

Упражнение 2. Исследовать на экстремум функцию $z(x,y)=x^2+y^2-4x-2y$.

Упражнение 3. Исследовать на экстремум функцию $z(x,y)=x^3+y^4-3x-2y^2$.

Упражнение 4. Найти экстремум функции $z(x,y)=xy$ при условии $x^2+y^2=2$.

Упражнение 5. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z(x,y)=x^2-xy+y^2-4x$ в области, ограниченной прямыми $x=0,\ y=0,\ 2x+3y-12=0$.

Раздел 5. Интегральное исчисление функции нескольких переменных

Тема 5.1. Понятие первообразной. Неопределенный интеграл

Литература: [1, с. 292–317; 2, с. 146–151; 3, с. 251–274; 4, с. 152–157; 8, т. 1, с. 208].

Понятие первообразной и её свойства. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных интегралов. Замена переменной в неопределенном интеграле. Формула интегрирования по частям.

Основные понятия и определения

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на интервале $\left(a;b\right)$, если *F(x)* дифференцируема на *(a,b)* и $F'(x)=f(x)\quad \forall x\in(a,b)$.

Множество всех первообразных функции $f(x)$ на *(a,b)* называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом интервале и обозначается

$$\int f(x)dx=F(x)+C, \tag{5.1}$$

где $F(x)$ – какая-либо первообразная для функции $f(x)$ на *(a,b)*, C – произвольная постоянная.

Приведем таблицу основных неопределенных интегралов.

1. $\int 0dx = C.$ 2. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C(\alpha \neq -1).$

3. $\int dx = x + C.$ 4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$ 6. $\int e^x dx = e^x + C.$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$ 8. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$ 10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C.$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C.$

14. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arcctg\frac{x}{a} + C.$

15. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$

Для вычисления неопределенного интеграла мы должны, если это возможно, привести его к табличным интегралам. Рассмотрим основные приемы интегрирования.

I. Метод разложения. Пусть $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Тогда на основании свойства неопределенного интеграла имеем

$$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx,$$

причем слагаемые $f_1(x)$ и $f_2(x)$ стараются подобрать так, чтобы интегралы от них находились непосредственно.

II. Метод подстановки (метод введения новой переменной). Данный метод состоит в том, что в интеграле $\int f(x)dx$, нахождение которого затруднительно, вводят новую переменную *t*, связанную с переменной *x* соотношением

$$x = g(t),$$

где $g(t)$ – непрерывная строго монотонная функция, имеющая непрерывную производную $g'(t)$ на некотором интервале изменения t, после чего получают

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))\, g'(t)dt\,.$$

При этом стремятся подобрать такую подстановку $x = g(t)$, чтобы интеграл в правой части этого равенства был табличным или путь его нахождения был ясен. После того как этот интеграл найден возвращаются к первоначальной переменной с помощью обратной подстановки $t = g^{-1}(x)$.

Часто встречаются интегралы вида

$$\int f\left(ax+b\right) dx \qquad (a \neq 0)\,.$$

Если $F(t)$ – первообразная функции $f(t)$ на некотором интервале $\left(c,d\right)$, то, пользуясь подстановкой $t = ax + b$, получаем

$$\int f\left(ax+b\right)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C\,.$$

III. Метод интегрирования по частям. Пусть u и v – непрерывно дифференцируемые функции аргумента x. На основании формулы дифференциала произведения имеем $d(uv) = udv + vdu$.

Отсюда

$$\int udv = uv - \int vdu\,. \qquad (5.2)$$

Эта формула называется формулой интегрирования по частям. Она показывает, что интеграл $\int udv$ приводится к интегралу $\int vdu$, который может оказаться более простым, чем исходный, или даже табличным.

К интегралам, которые находятся по формуле (5.2) относятся, например, интегралы вида

$$\int P(x) f(x)dx\,,$$

где $P(x)$ – многочлен; $f(x)$ – одна из следующих функций: e^{kx}, a^{kx}, $\sin kx, \cos kx$. Чтобы свести в этом случае интеграл к табличному, надо последовательно применять формулу (5.2) столько раз, какова степень многочлена $P(x)$, причем в первый раз за u выбрать $P(x)$ и за dv выбрать $f(x)dx$.

Пример 5.1.1. Вычислить интегралы:

1) $\int \left(\arcsin x\right)^2 dx$; 2) $\int \dfrac{dx}{x^5 - x^2}$.

Решение. 1). Выполнив сначала замену переменной $t = \arcsin x$, а затем интегрирование по частям, получаем:

$$\int (\arcsin x)^2 dx = \begin{vmatrix} t = \arcsin x, \ x = \sin t \\ dx = \cos t\, dt \end{vmatrix} = \int t^2 \cos t\, dt = \begin{vmatrix} u = t^2, \ du = 2tdt \\ dv = \cos t, \ v = \sin t \end{vmatrix} =$$

$$= t^2 \sin t - \int 2t \sin t dt.$$

Для последнего интеграла снова применим формулу интегрирования по частям (5.2):

$$\int 2t \sin t dt = \begin{vmatrix} u = 2t, \quad du = 2dt \\ dv = \sin t dt, v = -\cos t \end{vmatrix} = -2t\cos t + \int 2\cos t dt = -2t\cos t + \sin t + C.$$

Окончательно, если учесть, что $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2}$ получаем

$$\int (\arcsin x)^2 dx = t^2 \sin t + 2t\cos t - \sin t + C = \left((\arcsin x)^2 - 2\right)x +$$

$$+ 2\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2} + C.$$

2) Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью. Разложим знаменатель этой дроби на множители: $x^5 - x^2 = x^2\left(x^3 - 1\right) =$ $x^2(x-1)\left(x^2 + x + 1\right)$. Тогда

$$\frac{1}{x^5 - x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)\left(x^2+x+1\right)} = \frac{B}{x} + \frac{A}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$

Приводим к общему знаменателю и приравниваем числители дробей, стоящих в правой и левой частях этого равенства, имеем

$$1 = A(x-1)\left(x^2+x+1\right) + Bx(x-1)\left(x^2+x+1\right) + Cx^2\left(x^2+x+1\right) + (Dx+E)x^2(x-1).$$

Действительными корнями знаменателя являются числа 0 и 1. Поэтому при $x = 0$ имеем $1 = -A$, т.е. $A = -1$; при $x = 1$ имеем $1 = 3C$, т.е. $C = \dfrac{1}{3}$.

Для нахождения других коэффициентов перепишем последнее равенство в виде

$$1 = A\left(x^3 - 1\right) + B\left(x^4 - x\right) + C\left(x^4 + x^3 + x^2\right) + Dx^4 + Ex^3 - Dx^3 - Ex^2$$

или

$$1 = x^4(B + C + D) + x^3(A + C + E - D) + x^2(C - E) + x(-B) - A.$$

Сравнивая коэффициенты при x^4, x^3, x^2 этого равенства, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} B+C+D=0, \\ A+C+E-D=0, \\ C-E=0, \end{cases}$$

из которой найдем $B=0, D=-\frac{1}{3}, E=\frac{1}{3}$. Итак,

$$\frac{1}{x^5-x^2}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x-1}{3(x^2+x+1)}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{x^5-x^2}=-\int\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\int\frac{d(x-1)}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1-3}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+\frac{3}{6}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{x}+\frac{2}{6}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right|+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{x}+\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C. \ ►$$

Упражнение 1. Вычислите интегралы, используя тождественные преобразования подынтегральной функции и *метод разложения*:

а) $\int\left(\sqrt{x}-3x^2+5\right)dx$; б) $\int\left(x^2+4x^3-x+1\right)dx$; в) $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$;

г) $\int e^x\left(2-\frac{e^{-x}}{x^7}\right)dx$; д) $\int(\sin x+6\cos x)dx$; е) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$;

ж) $\int\frac{3-2ctg^2x}{\cos^2 x}dx$; з) $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$; и) $\int tg^2xdx$;

к) $\int\left(\frac{5x^8+1}{x^2}\right)dx$; л) $\int\left(\frac{3x^4+3x^2-11}{x^2+1}\right)dx$; м) $\int\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)dx$;

н) $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$; о) $\int\frac{3tg^2x+4}{\sin^2 x}dx$; п) $\int\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}-\frac{3}{\sqrt{x^5}}\right)dx$;

Упражнение 2. Вычислите интегралы, используя *метод подстановки*:

а) $\int\frac{3^{1/x}}{x^2}dx$; б) $\int\frac{x}{1-4x^2}dx$; в) $\int\sqrt{3+\cos 5x}\sin 5xdx$;

г) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^8-7}}$; д) $\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}dx$; е) $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

ж) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$; з) $\int \cos 5x\, dx$; и) $\int e^{6x}dx$;

к) $\int \sqrt{3x-7}dx$; л) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{3-7x}}$; м) $\int \frac{\cos 3x}{4-\sin x}dx$;

о) $\int e^{\cos x}\sin x dx$; п) $\int \frac{e^{arctgx}}{1+x^2}dx$; р) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

с) $\int \frac{2^x}{x^3}dx$; т) $\int \frac{3x}{1+x^2}dx$; у) $\int \sqrt{7-\cos 3x}\sin 3x dx$.

Упражнение 3. Вычислите интегралы, используя *метод интегрирования по частям*:

а) $\int e^{\cos x}\sin x dx$; б) $\int \frac{e^{arctgx}}{1+x^2}dx$; в) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

г) $\int x\sin x dx$; д) $\int x^2e^x dx$; е) $\int arctgx\, dx$;

ж) $\int x^2 \ln x dx$; з) $\int x\, arctgx\, dx$; и) $\int \arcsin x\, dx$;

к) $\int e^x \sin x\, dx$; л) $\int \sin\sqrt{x}\, x\, dx$; м) $\int (x^2+2x-6)\sin x\, dx$.

Тема 5.2. Определенный интеграл. Методы вычисления

Литература: [1, с.318–357; 2, с. 152–160; 3, с. 283-311; 4, с. 169–175; 8, т. 1, с. 243–247].

Интегральная сумма. Теорема существования определенного интеграла. Определенный интеграл и его основные свойства. Оценка определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям. Замена переменной. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций. Признаки сравнения.

Основные понятия и определения

Если существует не зависящий от способа разбиения отрезка [*a; b*] на частичные отрезки $[x_{k-1}; x_k]$ и выбора промежуточных точек ξ_k предел интегральной суммы при $\lambda \to 0 (\lambda = \max\{\Delta x_1; \Delta x_2; ...; \Delta x_n\})$, то функция *f(x)* называется интегрируемой на этом отрезке, а сам предел – определенным интегралом от функции *f(x)* на отрезке [*a; b*] и обозначается $\int_a^b f(x)dx$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k . \quad (5.3)$$

Если $F(x)$ – одна из первообразных непрерывной на $[a; b]$ функции $f(x)$, то справедлива формула Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (5.4)$$

Если функции $u = u(x)$ и $\upsilon = \upsilon(x)$ непрерывны вместе со своими производными на $[a; b]$, то имеет место формула интегрирования по частям

$$\int_a^b u d\upsilon = u\upsilon\Big|_a^b - \int_a^b \upsilon du . \quad (5.5)$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема и строго возрастает на $[\alpha;\beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt , \quad (5.6)$$

называемая формулой замены переменной в определенном интеграле.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ ($f(x) \ge 0\ \forall\ x \in [a ; b]$), прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx. \quad (5.7)$$

Пусть $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ – непрерывные на $[a, b]$ функции и $f_1(x) \le f_2(x)$ при любом $x \in [a, b]$. Тогда площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = f_1(x), y = f_2(x), x = a, x = b$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx . \quad (5.8)$$

Пример 5.2.1. Вычислить площадь, ограниченную графиками кривых $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ на отрезке $[0,1]$.

Решение. Найдем точки пересечения графиков $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$. Для этого решим уравнение $x^2 = \sqrt{x}$. Получаем $x = 0$ и $x = 1$. При этом $y = 0$ и $y = 1$ соответственно. Таким образом, точки $(0;0)$ и $(1;1)$ – точки пересечения данных графиков (рис. 20). Из рисунка видно, что площадь $S = S_1 - S_2$. где S_1 – площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком $y = \sqrt{x}$, а S_2 – площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком $y = x^2$.

Поэтому $S = \int\limits_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

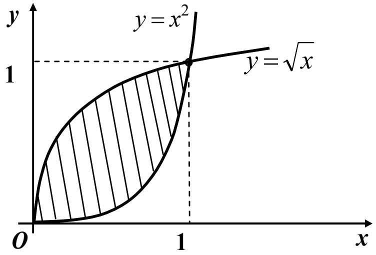

Рис. 20. Рисунок к примеру 5.2.1

Ответ: $S = \frac{1}{3}$ $(кв.\ ед)$. ►

Упражнение 1. Вычислите интегралы:

а) $\int\limits_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; б) $\int\limits_1^e \frac{(x-1)^2}{x}dx$; в) $\int\limits_1^4 \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{x}dx$;

г) $\int\limits_0^8 \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)dx$; д) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{1+4x^2}dx$; е) $\int\limits_1^4 \frac{\sqrt{x}+1}{x^2}dx$;

ж) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$; з) $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x}dx$; и) $\int\limits_0^1 \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{x}dx$.

Упражнение 2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{x^2}{2} - 3x + 2 \text{ и } y = x - 4.$$

Упражнение 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 - 2x,\ y = 3 \text{ и } y = 0{,}25(x^2 - 8x + 12)$$

Упражнение 4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \ln x,\ x = 0,\ \ y = 0 \text{ и } y = 1.$$

Упражнение 5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямой $x = 1$, параболой $y = x^2 - 4x + 5$ и касательной к этой параболе, проведенной в точке $x_0 = 3$.

СОДЕРЖАНИЕ

Подписано в печать 02.05.2017 г.
Объем 4,7 уч.-изд. л. Формат 64х90 1/16. Бумага офсетная.
Тираж 100 экз. Заказ №4311.
Отпечатано в типографии «Новый формат»,
656049, г. Барнаул, пр-т Социалистический, 85,
тел.: (3852) 36-82-51, 8-800-700-1583,
nf-kniga@yandex.ru,
сайт: типография-новый-формат.рф