

Министерство образования и науки РФ  
Алтайский государственный университет

**С.В. Дронов**

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ:  
элементарные методы,  
случайные величины,  
предельные теоремы**

*Учебное пособие  
для студентов математических специальностей*



Барнаул

---

Издательство  
Алтайского государственного  
университета  
2014

УДК 519.2(075.8)

ББК 22.171я75

Д 755

*Рецензенты:*

доктор физ.-мат. наук *Г.В. Пышиноград*;

кандидат физ.-мат. наук *А.Н. Саженов*

Д 755 **Дронов, С.В.**

Теория вероятностей: элементарные методы, случайные величины, предельные теоремы [Текст] : учебное пособие для студентов математических специальностей / С.В. Дронов. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2014. – 88 с.

ISBN 978-5-7904-1724-5

Приводятся основные факты и даются необходимые обоснования понятиям университетского курса теории вероятностей. Определяются понятия случайной величины, случайного вектора, их функций распределения и числовых характеристик случайных величин и векторов. Изложена подробная теория интегралов по вероятности и Лебега – Стильтьеса в его вероятностном аспекте.

Пособие предназначено для студентов математических и других специальностей, углубленно изучающих теорию вероятностей.

УДК 519.2(075.8)

ББК 22.171я75

*Настоящее издание опубликовано  
в рамках реализации Программы стратегического развития  
Алтайского государственного университета*

ISBN 978-5-7904-1724-5

© Дронов С.В., 2014

© Оформление. Издательство Алтайского  
государственного университета, 2014

# Оглавление

<b>1. Основные понятия</b> . . . . .	<b>6</b>
1.1. Предмет и метод теории вероятностей . . . . .	6
1.2. Случайные события . . . . .	6
<b>2. Различные схемы вероятностей</b> . . . . .	<b>7</b>
2.1. Классическая вероятностная схема . . . . .	7
2.2. Обобщение классической вероятностной схемы . . . . .	7
2.3. Геометрическая и статистическая вероятности . . . . .	8
<b>3. Аксиоматика Колмогорова</b> . . . . .	<b>9</b>
3.1. Аксиоматическое определение вероятности. Вероятностное пространство . . . . .	9
3.2. Свойства вероятности. Аксиома непрерывности . . . . .	10
<b>4. Элементарные методы теории вероятностей</b> . . . . .	<b>12</b>
4.1. Условная вероятность и независимые события . . . . .	12
4.2. Формулы полной вероятности и Байеса . . . . .	13
4.3. Последовательность испытаний с двумя исходами (схема Бернулли); точные формулы . . . . .	15
4.4. Схема Бернулли: теоремы Пуассона и Муавра – Лапласа . . . . .	16
<b>5. Случайные величины и их функции распределения</b> . . . . .	<b>17</b>
5.1. Основные определения . . . . .	17
5.2. Дискретный тип распределения . . . . .	19
5.3. Абсолютно непрерывный тип . . . . .	20
5.4. Единый взгляд на два типа распределений . . . . .	23
<b>6. Совместное распределение</b> . . . . .	<b>24</b>
<b>7. Математическое ожидание – простейшие ситуации</b> . . . . .	<b>25</b>
7.1. Определение в дискретном случае и его первые следствия . . . . .	25

7.2. Примеры. Математическое ожидание индикатора . . . . .	29
7.3. Математическое ожидание произведения . . . . .	30
7.4. Математическое ожидание. Неравенства . . . . .	31
<b>8. Дисперсия . . . . .</b>	<b>34</b>
8.1. Определение и свойства . . . . .	34
8.2. Примеры. Одно применение . . . . .	36
<b>9. Совместные характеристики . . . . .</b>	<b>37</b>
9.1. Числовые характеристики векторов . . . . .	37
9.2. Коэффициент корреляции . . . . .	38
<b>10. Предельные теоремы – вводные замечания . . . . .</b>	<b>39</b>
10.1. Зачем нужны предельные теоремы . . . . .	39
10.2. Распределение суммы. Свертка . . . . .	40
<b>11. Сходимость последовательностей случайных величин . . . . .</b>	<b>41</b>
11.1. Сходимости почти наверное и по вероятности . . . . .	41
11.2. Слабая сходимость . . . . .	44
11.3. Теоремы непрерывности . . . . .	48
<b>12. Характеристические функции . . . . .</b>	<b>50</b>
12.1. Определение и простейшие свойства . . . . .	50
12.2. Примеры . . . . .	52
12.3. Основная теорема о характеристических функциях . . . . .	53
12.4. Характеристические функции многомерных распределений . . . . .	56
<b>13. Законы больших чисел . . . . .</b>	<b>58</b>
<b>14. Центральная предельная теорема . . . . .</b>	<b>61</b>
<b>15. Задачи на предельные теоремы теории вероятностей . . . . .</b>	<b>64</b>
<b>16. <math>\sigma</math>-алгебры и распределения . . . . .</b>	<b>66</b>
16.1. Определение и простейшие свойства $\sigma$ -алгебр . . . . .	66

16.2. Борелевские $\sigma$ -алгебры. Распределения случайных величин . . . . .	68
16.3. Частные случаи. Считающие меры . . . . .	70
16.4. Независимость классов событий . . . . .	72
<b>17. Математическое ожидание как интеграл . . . . .</b>	<b>73</b>
17.1. Построение интеграла по вероятности . . . . .	73
17.2. Простейшие свойства интеграла по вероятности . . . . .	77
<b>18. Интеграл Лебега – Стильеса . . . . .</b>	<b>81</b>
<b>19. Произведение мер и повторные интегралы . . . . .</b>	<b>85</b>
Библиографический список . . . . .	87

*Учебное издание*

**Сергей Вадимович Дронов**

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ:  
элементарные методы,  
случайные величины,  
предельные теоремы**

*Учебное пособие  
для студентов математических специальностей*

Редактор *Е.М. Федяева*  
Подготовка оригинал-макета,  
дизайн обложки – *Т.И. Котикова*

Издательская лицензия ЛР №020261 от 14.01.1997 г.  
Подписано в печать 08.09.2014. Формат 60×84 1/16.  
Усл.-печ. л. 5,1. Тираж 100. Заказ № 321.

Издательство Алтайского государственного университета;  
типография Алтайского государственного университета:  
656049 Барнаул, ул. Димитрова, 66