Секция 1. АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

УДК 512.545

Об о-аппроксимируемом многообразии m-групп

Н.В. Баянова
АлтГУ, г. Барнаул

Напомним [1], что m-группой называется алгебраическая система G сигнатуры $\mathrm{m}=\left\langle \cdot, e, {}^{-1}, \vee, \wedge, * \right\rangle$, где $\left\langle G, \cdot, e, {}^{-1}, \vee, \wedge \right\rangle$ является решеточно упорядоченной группой (ℓ-группой) и одноместная операция $*$- автоморфизм второго порядка группы $\left\langle G, \cdot, e, {}^{-1} \right\rangle$ и антиизоморфизм решетки $\left\langle G, \vee, \wedge \right\rangle$, т.е. для любых $x, y \in G$ выполнены соотношения:

$$(xy)_* = x_* y_*, \quad (x_*)_* = x, \quad (x \wedge y)_* = x_* \vee y_*, \quad (x \vee y)_* = x_* \wedge y_*.$$

Свойства реверсивных автоморфизмов второго порядка были изучены в [2]. Как обычно, $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy, |x| = x \vee x^{-1}$.

Класс ℓ-групп (m-групп) X называется многообразием ℓ-групп (m-групп), если существует множество Φ тождеств сигнатуры ℓ (сигнатуры m) такое, что X состоит из всех ℓ-групп (m-групп), на которых истинны все тождества из Φ. Множество всех многообразий ℓ-групп (m-групп) L (M) является частично упорядоченным множеством относительно теоретико-множественного включения. Более того, множества L и M являются решетками относительно естественно определенных операций пересечения и объединения многообразий. Основные свойства решетки многообразий m-групп были указаны М. Жироде и Й. Рахунеком в [1]. Исследование свойств решетки многообразий m-групп продолжили В.М. Копытов и Й. Рахунек [3], Н.В. Баянова и А.В. Зенков [4], Н.В. Баянова [5].

Многообразие m-групп Y накрывает многообразие m-групп X в решетке M если $X \subset Y$ и для всякого многообразия m-групп Z, $X \subseteq Z \subseteq Y$, выполнено $Z = X$ или $Z = Y$.

Если G – произвольная ℓ-группа, обозначим через G^R ℓ-группу, полученную из G обращением порядка, т.е. $b \leq^R a$ в G^R тогда и только тогда когда $a \le b$ в $G.$ Пусть V - произвольное многообразие ℓ-групп обозначим через $V^R = \{ G^R \mid G \in V \}.$

В работе [6] доказано, что V^R является многообразием ℓ-групп и построен нетривиальный автоморфизм второго порядка θ решетки многообразий ℓ-групп, определенный по правилу: $\theta(V) = V^R.$ Согласно [1], многообразие ℓ-групп называется реверсивным, если $V = V^R.$ Реверсивными многообразиями ℓ-групп являются многообразия ℓ-групп, определяемые тождествами групповой сигнатурой, многообразие ℓ-групп с субнормальными скачками, а также многообразие о-аппроксимируемых ℓ-групп, определяемое тождеством $\left(x \wedge y^{-1}x^{-1}y\right) \vee e = e.$ Значение реверсивных многообразий ℓ-групп в изучении решетки M многообразий m-групп определяется следующей теоремой.

Теорема 1. (М.Жироде, Й. Рахунек, [1]) Всякое множество тождеств, определяющих реверсивное многообразие ℓ-групп, определяет многообразие m-групп.

В [7] введено о-аппроксимируемое многообразие ℓ-групп C, которое содержит все о-аппроксимируемые накрытия многообразия абелевых ℓ-групп и определяется бесконечной системой тождеств:

1) $\left(x \wedge y^{-1}x^{-1}y\right) \vee e = e$

2) $$\left(\left(\left[|x|, |x| \vee |y|\right] \vee e\right) \wedge |x|\right)^n \wedge \left(|x| \vee |x|^{(|x| \vee |y|)}\right) = \\ = \left(\left(\left[|x|, |x| \vee |y|\right] \vee e\right) \wedge |x|\right)^n, \ n \in N.$$

Н.Я. Медведев и С.В. Морозова в [8] изучили свойства многообразия ℓ-групп C, установив, что оно не является реверсивным и показали, что многообразия ℓ-групп C и $\theta(C)$ не имеют накрытий в решетке всех о-аппроксимируемых многообразий ℓ-групп.

В решетке многообразий ℓ-групп L рассмотрим многообразие $\theta(C) \vee_L C,$ которое является реверсивным, поскольку

$$\theta\left(\theta(C) \vee_L C\right) = \theta^2(C) \vee_L \theta(C) = C \vee_L \theta(C).$$

Согласно теореме 1 множество ℓ-групповых тождеств, определяющих многообразие $\theta(C) \vee_L C,$ также задает многообразие m-групп $C_m.$

Обозначим через $A=\left(\left[\,|x|,\,|x|\vee|y|\,\right]\vee e\right)\wedge|x|$, $B=\left(\left[\,\left(|z|\vee|t|\right)^{-1},|z|^{-1}\right]\vee e\right)\wedge|z|$.

Теорема. В решетке многообразий m-групп M многообразие C_m определяется следующей бесконечной системой тождеств:

1) $\left(x\wedge y^{-1}x^{-1}y\right)\vee e=e$

2) $\left|\left(A^n\wedge\left(|x|\vee|x|^{\left(|x|\vee|y|\right)}\right)\right)A^{-n}\right|\wedge\left|\left(B^k\wedge\left(|z|\vee|t|^{\left(|z|\vee|t|\right)^{-1}}\right)\right)B^{-k}\right|=e$

где $n,k\in N$ и многообразие m-групп C_m не имеет накрытий в решетке о-аппроксимируемых многообразий m-групп.

Библиографический список

1. Giraudet M., Rachunek J. Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech. Math. J.– 1999. – № 124(49). – P. 743–766.

2. Баянова Н.В., Никонова О.В. Реверсивные автоморфизмы решеточно упорядоченных групп // Сиб. мат.ж. – 1995. – № 4(36). – С. 765–768.

3. Копытов В.М., Рахунек Й. Наибольшее собственное многообразие m-групп // Алгебра и логика.– 2003.–№ 5(42)– С. 624–635.

4. Баянова Н.В., Зенков А.В. О бесконечной дистрибутивности в решетке многообразий m-групп // Алгебра и логика. – 2015. – № 1(54)– С. 3–15.

5. Баянова Н.В. О решетке многообразий m-групп // МАК-2017: сборник трудов всероссийской конференции по математике.– Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2017. – С. 7-9.

6. Huss M.E., Reilly N.R. On reversing the order of lattice-ordered groups // J. Algebra– 1994. – № 9– P. 176–191.

7. Anderson M., Darnel M., Feil T. A variety of lattice-ordered groups containing all representable covers of the abelian variety // Order– 1991. – № 7– P. 401–405.

8. Medvedev N.Ya., Morozova S.V. On covers in the lattice of representable ℓ-varieties // Czech. Math. J.– 1998. – № 123(48) – P. 821–831.