разий с тривиальным тензором Вейля), так и изучению многообразий, имеющих нетривиальный тензор Вейля, но при этом тензор имеет нулевой квадрат длины.

В случае многообразий, имеющих размерность 3 изучается тензор Схоутена-Вейля, являющийся аналогом тензора Вейля в данных многообразиях, поскольку тензор Вейля здесь тривиален. В работе [1] тензор Схоутена-Вейля был исследован в случае левоинвариантной лоренцевой метрики на 3-мерных группах Ли. Данное исследование — продолжение исследований Дж. Милнора [2] по левоинвариантным римановым метрикам на 3-мерных группах Ли.

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [3, 4], а именно, в ней изучаются 4-мерные локально однородные пространства с левоинвариантной псевдоримановой метрикой с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Вейля.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00033 мол_а.

Библиографический список

1. Родионов Е.Д., Славский В.В., Чибрикова Л.Н. Левоинвариантные лоренцевы метрики на трехмерных группах Ли с нулевым квадратом длины тензора Схоутена-Вейля. // ДАН. – 2005. – Т. 401, № 4. – С. 459–461.

2. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. – 1976. – Vol. 21. – P. 293–329.

3. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О гармонических тензорах на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // ДАН. – 2008. – Т. 419, № 6. – С. 735–738.

4. Khromova O.P., Klepikov P.N., Klepikova S.V., Rodionov E.D. About the Schouten-Weyl tensor on 3-dimensional Lorenzian Lie groups // Электронный ресурс arXiv.org – 2017. https://arxiv.org/abs/1708.06614.

УДК 579.64

Метрики деревьев и псевдоевклидова геометрия

М.В. Куркина[1], В.В. Славский[2], А.С. Тякунов[2]
[1]Югорский государственный университет, г. Ханты-Мансийск;
[2]АлтГУ, г. Барнаул

Один из наиболее распространенных методов кластеризации данного конечного множества $X = \{i\}_{i=1,n}$ является представление его листьями взвешенного дерева $X \subset \{G, \rho_{ij}\}$, где G - связный ациклический взвешенный граф. Расстояние ρ_{ij} между двумя вершинами дерева – сумма весов ребер на пути между ними. Главная проблема при этом найти граф $\{G, \rho_{ij}\}$ и метрику дерева, которая была бы наиболее адекватна структуре X.

Эта проблема, известная как численная таксономии, имеет приложения в различных областях науки, таких как лингвистика и эволюционная биология. Например, в эволюционной биологии метрики дерева представляют ветвящийся процесс эволюции, который приводит к наблюдаемому распределению данных [1]. Естественно, эта проблема привлекла (и привлекает) большое внимание. В данной работе устанавливается связь этой проблемы с псевдоевклидовой геометрией (теорема 3).

Справедлива теорема Бунемана [2]:

Теорема 1. Неотрицательная функция $\rho : X \times X \to R^{+}$ определяет на множестве объектов X аддитивную метрику дерева в том и только в том случае если выполнено четырех-точечное условие:

1. $\rho_{ij} = \rho_{ji}, \quad \forall i, j, k, s \in X,$
2. $\rho_{ij} + \rho_{ks} \le \max\{\rho_{ik} + \rho_{js}, \rho_{kj} + \rho_{is}\},$ (*)
3. $\rho_{ij} = 0 \Leftrightarrow i = j$.

В этом случае однозначно строится взвешенный граф $\{G, \rho_{ij}\}$ с множеством листьев X. Частным случаем аддитивной метрики является ультраметрика:

1. $\rho_{ij} = \rho_{ji}, \quad \forall i, j, k \in X,$
2. $\rho_{ij} \le \max\{\rho_{ik}, \rho_{kj}\},$
3. $\rho_{ij} = 0 \Leftrightarrow i = j$.

Замечание 1. Для любой строго монотонно возрастающей числовой функции $\psi : R^{+} \to R^{+}$ функция $\psi(\hat{\rho}_{ij})$ также ультраметрика.

Определение 1. Пусть $\{\rho_{ji}\}$ – аддитивная метрика преобразованием Farris [3] называется переход к аддитивной метрики вида:

$$\hat{\rho}_{ij} = \rho_{ij} + \lambda_i + \lambda_j,$$

Теорема 1. Пусть $\{\rho_{ji}\}$ – аддитивная метрика существуют $\{\lambda_k\}$ и преобразование Farris переводящая её в ультраметрику.

Справедлива теорема [4]:

Теорема 2. Пусть $\{X,\rho\}$ – конечное ультраметрическое пространство с метрикой ρ_{ij}, тогда существует изометричное вложение $\phi:\{X,\rho\}\to R^{n-1}$ в евклидово пространство R^{n-1} (n – число элементов в X) такое, что:

- $\rho_{ij}=\|\phi(i)-\phi(j)\|,\ \ \forall i,j\in X;$
- $r=\|\phi(i)\|,\ \ \forall i\in X,$

где $r\le\frac{D}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}$. То есть образ $\phi[X]\subset R^{n-1}$ – лежит на сфере с центром в начале координат радиуса r, здесь $D=\max_{i,j}\rho(x_i,x_j)$ - диаметр X.

Пусть $M^n=R^{n-1}\times R$ псевдоевклидово пространство, скалярный квадрат вектора $z=\left[\vec{x},\zeta\right]\in R^{n-1}\times R=M^n$ в котором равен: $\langle z,z\rangle=\|\vec{x}\|^2-|\zeta|^2$. Обозначим через:

$$C^+=\left\{z\in M^n:\langle z,z\rangle=0,\zeta>0\right\}$$

изотропный конус в пространстве Минковского M^n.

Лемма. Для любых двух точек конуса $z_1,z_2\in C^+$ и $\lambda_1,\lambda_2>0$ верно равенство:

$$\|\lambda_1 z_1-\lambda_2\, z_2\|=\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\,\|z_1-z_2\|,$$

здесь $\|z_1-z_2\|$ расстояние между точками в псевдоевклидовом пространстве M^n.

Доказательство: Так как $z_1=\left[x_1,|x_1|\right],\ \ z_2=\left[x_2,|x_2|\right]$

$$\|z_1-z_2\|^2=(x_1-x_2)^2-(|x_1|-|x_2|)^2=-2(x_1,x_2)+2|x_1||x_2|$$

значит

$$\|\lambda_1 z_1-\lambda_2 z_2\|^2=-2\lambda_1\lambda_2(x_1,x_2)+2\lambda_1\lambda_2|x_1||x_2|=\lambda_1\lambda_2\|z_1-z_2\|^2$$

Теорема 3. Пусть X конечное множество с аддитивной метрикой $\rho:X\times X\to R^+$. Тогда существует изометричное вложение $\phi:\left\{X,Exp[\rho_{ij}]\right\}\to C^+$ в виде подмножества изотропного конуса в псевдоевклидова пространства Минковского M^n.

Доказательство: согласно замечанию 1 существует преобразование Farris переводящие аддититивную метрику ρ_{ij} в ультраметрику $\hat{\rho}_{ij} = \rho_{ij} + \lambda_i + \lambda_j$, по замечанию 2 и теореме 1 существует изометричное вложение

$$\phi: \left\{X, Exp[\hat{\rho}_{ij}]\right\} \to S^{n-1} \subset C^+,$$

или

$$\phi: \left\{X, Exp[\rho_{ij}]Exp[\lambda_i]Exp[\lambda_j]\right\} \to S^{n-1} \subset C^+.$$

Применяя лемму получаем изометричное вложение

$$\phi: \left\{X, Exp[\rho_{ij}]\right\} \to C^+$$

Замечание. Метрика, $Exp[\rho_{ij}] = \mu_{ij}$ вообще говоря, не обладает четырех-точечным свойством аддитивной метрики (*), вместо него выполняется "усиленное" неравенство Птолемея:

- $\mu_{ij}\mu_{ks} \le \max\left\{\mu_{ik}\mu_{js}, \mu_{kj}\mu_{is}\right\}, \ \forall i, j, k, s \in X$. (**)

Так как индексы $\{i, j, k, s\}$ равноправны, то данное неравенство эквивалентно выполнению свойства: $\left\{\mu_{ij}\mu_{ks}, \mu_{ik}\mu_{js}, \mu_{kj}\mu_{is}\right\}$ - два числа из трех равны и больше третьего, либо все равны между собой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-01-00620).

Библиографический список

1. Steven N. Evans. Probability and Real Trees. – Lecture Notes in Mathematics 1920. Springer Berlin Heidelberg New York, 2005. – 204 с.

2. Buneman P. A Note on the Metric Properties of Trees // Journal of combinatorial theory. – 1974. – № 17. – С. 48–50.

3. A. Dress, K.T. Huber, V. Moulton. Some Uses of the Farris Transform in Mathematics and Phylogenetics—A Review // Annals of Combinatorics 11 (2007) 1–37.

4. V.N. Berestrovskii. Ultrametric spaces, Proceedings on Analysis and Geometry (S. K. Vodop'ianov, ed.), Sobolev Institute Press, Novosibirsk, 2001, pp. 47–72.