## УДК 514.765

# Поля Киллинга и солитоны Риччи на четырехмерных 3-симметрических лоренцевых многообразиях

***Д.Н. Оскорбин, Е.Д. Родионов, И.В. Эрнст***
*АлтГУ, г. Барнаул*

В работе описаны поля Киллинга на четырёхмерных 3-симметрических лоренцевых многообразиях. Поля Киллинга – векторные поля скоростей (локальной) однопараметрической группы движений риманова или псевдориманова многообразия. Нахождение полей Киллинга необходимо для описания солитонов Риччи, которые являются обобщением эйнштейновых метрик на (псевдо)римановых многообразиях.

Уравнение солитона Риччи изучалось на различных классах многообразий многими математиками. В частности, авторами ранее было доказано существование решения уравнения солитона Риччи на 3-симметрических четырехмерных лоренцевых многообразиях размерности четыре. В данной работе получено общее описание полей Киллинга и вычислена размерность алгебры киллинговых полей на таких многообразиях.

**Библиографический список**

1. Hamilton R. S. The Ricci flow on surfaces // Contemporary Mathematics. – 1988. – V. 71.

2. Галаев А.С. Группы голономии лоренцевых многообразий и супермногообразий // Матем. сборник. – 2013. – Т. 204, № 9. –С. 29–50.

3. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д., Эрнст И.В. О солитонах Риччи на 3-симметрических лоренцевых многообразиях // Известия Алтайского государственного университета. – 2018. – № 1 (99). – С. 119–122.

## УДК 519.3

# О вопросах сходимости комбинированных методов штрафных функций

***Е.А. Плотникова[1], А.Н. Саженков[2], Т.В. Саженкова[2]***
*[1]НГТУ, г. Новосибирск; [2]АлтГУ, г. Барнаул*

В работах [1–3] Полака Э., Сеа Ж., Фиакко А, Мак-Кормика Г. представлены исследования вопросов сходимости методов внешних и внутренних (барьерных) штрафных функций в применении к задаче минимизации выпуклой функции $f$ на компакте $K \subset R^n$, задаваемом системой неравенств $g_j(x) \leq 0$, $j = 1, 2, ..., m$, с выпуклыми функциями $g_j$, в предположении, что существует точка $x_0$, в которой $g_j(x_0) < 0$ для всех $j$ (не пустая внутренность $K$). При этом в этих работах рассматриваются штрафные функции типа срезки, показательная (бесконечный штраф), обратная и логарифмическая штрафные функции:

$$\Phi_k(x) = A_k \sum_{j=1}^{m} \left( \max\left(0, g_j(x)\right) \right)^2 ; \ \Phi_k(x) = \sum_{j=1}^{m} e^{A_k g_j(x)} ;$$

$$\Phi_k(x) = \frac{1}{A_k} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{-g_j(x)} \quad \text{и} \quad \Phi_k(x) = -\frac{1}{A_k} \sum_{j=1}^{m} \ln\left(-g_j(x)\right), \quad \text{если}$$

$g_j(x) < 0$, и $\Phi_k(x) = +\infty$, если $g_j(x) \geq 0$.

Здесь последовательность $A_k$ такая, что $A_k > 0$, $A_k \to +\infty$.

В работах [4, 5] для решения поставленной задачи методом штрафов А.А. Капланом вводятся в рассмотрение функции:

$$\Phi_k^{(t)}(x) = A_k \sum_{j=1}^{m} \left( g_j(x) + \sqrt{g_j^2(x) + A_k^{-2-t}} \right), \ t \geq 0 \ \text{– константа.}$$

Для рассматриваемых функций в работах [4-6] установлена справедливость следующей теоремы.

**Теорема 1.** Указанные выше системы функций для задачи выпуклого программирования при $A_k > 0$, $A_k \to +\infty$ обладают свойствами:

1. $\Phi_k : R^n \to R$ – выпуклые функции.
2. $\lim\limits_{k\to\infty} \Phi_k(x) = 0$, если $x \in \operatorname{int} K$.
3. $\lim\limits_{k\to\infty} \Phi_k(x) = +\infty$, если $x \notin K$.
4. Начиная с некоторого номера, функции $F_k(x) = f(x) + \Phi_k(x)$ достигают своего безусловного минимума, последовательность $\{x^k\}$ точек минимума функций $F_k$ ограничена, любая ее предельная точка принадлежит множеству $K$ и доставляет минимум $f$ на $K$.

Таким образом, приведенная теорема говорит о принадлежности рассматриваемых классов функций к штрафным функциям.

Два первых типа из перечисленных выше функций и функции Каплана относятся к внешним штрафным функциям, а обратный и логарифмический штрафы – внутренние.

Метод штрафных функций – это двухступенчатый итерационный процесс. При отыскании решения задачи на безусловный экстремум применяются, как правило, итерационные градиентные методы. Поэтому скорость сходимости композиции методов оценивается числом больших шагов (методом штрафов), каждый из которых состоит из отыскания точки $x_\varepsilon^k$ – точки минимума функции $F_k(x) = f(x) + \Phi_k(x)$, полученной градиентным методом с заданной точностью $\varepsilon$.

Следующая далее теорема, фрагменты которой представлены в работах [5–8], дает при указанных в ней условиях оценки скорости сходимости методов штрафных функций.

**Теорема 2.** Пусть функции $f \in C^2(R^n)$, $g_j \in C^1(R^n)$, $j = 1, 2, ..., m$ – выпуклые, $(f''(x)\varepsilon, \varepsilon) \geq \gamma \|\varepsilon\|^2$ при некотором $\gamma > 0$ и любых $x$ и ε. Тогда для $0 < \tau < 1$ при применении метода штрафов с использованием штрафных функций Каплана с градиентным критерием останова $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ справедливо неравенство: $\left\|x^k - x^*\right\|^2 \leq \frac{1}{4\gamma}\left(\frac{A_k^{\tau-1}}{\sigma}\left(f\left(x^0\right) - f\left(x^*\right)\right) + \frac{m}{2}A_k^{-\tau}\right) + \frac{\varepsilon_k^2}{32\gamma^2}$, начиная с некоторого номера $k$ ( $x^*$ – точное решение исходной задачи, $x^0$ – из внутренности множества *K*). Для функций бесконечного штрафа справедливо: $\left\|x^k - x^*\right\|^2 \leq \frac{1}{\gamma}\left(\frac{A_k^{-1}\ln A_k}{\sigma}\left(f\left(x^0\right) - f\left(x^*\right)\right) + mA_k^{-1}\right) + \frac{\varepsilon_k^2}{8\gamma^2}$, а для обратного штрафа:

$\left\|x^k - x^*\right\|^2 \leq \frac{1}{\gamma}\left(\frac{A_k^{\tau-1}}{\sigma}\left(f\left(x^0\right) - f\left(x^*\right)\right) + mA_k^{-\tau}\right) + \frac{\varepsilon_k^2}{8\gamma^2}$, где $0 < \tau < 1$.

При ограничениях определенного вида в исходной экстремальной задаче методы барьерных функций и внешних штрафных функций логично комбинировать. Это комбинирование обуславливается достаточно конкретным видом ограничений, но, как оказывается, сохраняет теоретическую сходимость [3] при тех же условиях, что и для «чистых» методов. А именно, с использованием выше приведённых результатов, устанавливается справедливость утверждения следующей теоремы.

**Теорема 3.** Пусть в условиях теорем 1 и 2 рассматриваются решения $x^k$ задачи минимизации функции $F_k(x) = f(x) + \Phi_k'(x) + \Phi_k''(x)$, где $\Phi_k'(x)$ – внешние штрафные функции для части ограничений, а $\Phi_k''(x)$ – внутренние штрафные функции для остальных ограничений.

Для сочетаний следующих штрафных функций в комбинированном методе – бесконечный и обратный штраф, соответственно, штрафные функции Каплана и обратный штраф, справедлива следующая оценка:

$$\left\|x^k - x^*\right\|^2 \le \frac{1}{\gamma}\left(\frac{A_k^{\tau-1}}{\sigma}\left(f\left(x^0\right)-f\left(x^*\right)\right)+mA_k^{-\tau}\right)+\frac{\varepsilon_k^2}{8\gamma^2}$$, где $0<\tau<1$.

С вычислительной точки зрения, применение, как «чистых» методов, так и комбинированных сталкивается с решением вопроса о начале вычислительного процесса и его конце, то есть об обрыве процесса поиска минимизирующей последовательности $x^k$. В данной работе завершение процесса обосновано градиентным критерием останова. Что касается начала процесса, то обычная практика состоит в том, что начинают процесс с умеренной величины штрафа, а затем ее увеличивают в ходе вычислений, не обязательно одинаково для внешних и внутренних штрафов.

**Библиографический список**

1. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход / пер. с англ. – М., 1974.

2. Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы / пер. с франц. – М., 1973.

3. Фиакко А, Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации / пер. с англ. – М., 1972.

4. Каплан А.А. К вопросу о реализации метода штрафов. – Новосибирск, 1976.

5. Гроссман К., Каплан А.А. Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации. – Новосибирск, 1981.

6. Саженков А.Н., Саженкова Т.В., Пронь С.П. Об исследовании одного класса штрафных функций // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию: сб. ст. – Вып. 2. / главный редактор Е.Д. Родионов. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2016. – С. 86–88.

7. Плотникова Е.А., Саженков А.Н., Саженкова Т.В. О некоторых свойствах интегральных штрафных функций // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию; № 3 (2017). – Барнаул: Изд. АлтГУ, 2017. – С. 30–33

8. Саженкова Т.В., Саженков А.Н., Плотникова Е.А. О применении одного класса интегральных штрафных функций при решении вариационных задач // Известия АлтГУ. – 2018. – №1(99). – С. 123–126.