УДК 514.142

Канонический базис эники

И.В. Поликанова
АлтГПА, г. Барнаул

При изучении линий в n-мерном аффинном пространстве A^n, всякие 2 дуги которых аффинно-эквивалентны, автор обнаружил [1, 2], что отмеченным свойством обладают линии, задаваемые в некоторой аффинной системе координат (АСК) параметризацией

$$\vec{r} = (u, u^2, u^3, \dots, u^n\ ),\ u \in I\ , \tag{1}$$

где I – числовой промежуток, а верхние индексы означают степени.

Пространственная кривая γ_k в A^n, задаваемая в некоторой АСК параметризацией

$$\vec{r} = (u, u^2, u^3, \dots, u^k, 0, \dots, 0\ ),\ \mathrm{u} \in I, \tag{2}$$

называется *эникой степени* k. Эника степени 1 – прямая, степени 2 – парабола, степени 3 – кубика. При $k < n$ эника вырождена.

Назовём АСК *канонической*, если в ней эника γ_n задаётся *канонической параметризацией*

$$\vec{r} = \left(u, \frac{u^2}{2!}, \frac{u^3}{3!}, \dots, \frac{u^n}{n!}\right),\ u \in I, \tag{3}$$

или в координатах:

$$x_i = \frac{x_1^i}{i!}, \quad i = 2, \dots, n. \tag{4}$$

Цель статьи – установить существование канонической АСК в каждой точке эники и выяснить её геометрический смысл.

Теорема 0 [3].

а) *Если семейство параллельных гиперплоскостей в A^n таково, что каждая гиперплоскость пересекает энику в точках, сумма кратностей которых равна n, то центры масс этих наборов точек принадлежат одной прямой.*

б) *Для любых семейств параллельных гиперплоскостей в A^n, обладающих указанным свойством, прямые, содержащие центры масс точек пересечения эники с гиперплоскостями семейств, параллельны.*

Определяемое ими направление называется *асимптотическим.*

в) *Эника (1) имеет единственное асимптотическое направление, определяемое осью O_{x_n}.*

Напомним, что *-ой соприкасающейся плоскостью* гладкой линии γ: $\vec{r} = \vec{r}(u)$, $u \in I$, в точке $M(t) \in \gamma$, соответствующей параметру t, называется проходящая через эту точку k-мерная плоскость, векторное пространство которой натянуто на линейно независимые векторы $\vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t), \dots, \vec{r}^{\,(k)}(t)$.

Легко доказывается утверждение.

Теорема 1. *Проекция эники* γ_n:(1) *вдоль* $(n-k)$*-мерной координатной плоскости* $O_{x_{k+1} \dots x_n}$ *на* k*-ую соприкасающуюся плоскость в точке* O *есть эника* γ_k. *Отображение проектирования* γ_n *на* γ_k *есть гомеоморфизм.*

Теорема 2. *Для любой точки эники существует каноническая АСК с началом в этой точке.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что существует АСК, в которой эника задаётся канонической параметризацией. Для этого надо перейти от базиса $\{ \vec{e_i} \}_{i=1,\dots,n}$, в котором эника задаётся формулами (1), к базису $\{i!\, \vec{e_i} \}_{i=1,\dots,n}$.

Пусть $n = 2$. Эника задаётся каноническим уравнением $\vec{r} = \left(u, \frac{u^2}{2!}\right)$ или $y = \frac{x^2}{2}$. Перейдём к новой АСК с началом в точке $M(t) = \left(t, \frac{t^2}{2!}\right) \in \gamma$ и базисными векторами $\vec{r}\,'(t) = (1, t)$ и $\vec{e} = (0,1)$. Формулы преобразования координат при переходе к новой АСК имеют вид:

$$x = \tilde{x} + t, \qquad y = t\tilde{x} + \tilde{y} + \frac{t^2}{2!}.$$

Тогда в новой АСК парабола будет задаваться уравнением

$$t\tilde{x} + \tilde{y} + \frac{t^2}{2} = \frac{(\tilde{x}+t)^2}{2}.$$

Преобразуя его, получим: $\tilde{y} = \frac{\tilde{x}^2}{2}$ – опять же каноническое. Таким образом, АСК $\{M(t);\ \vec{r}\,'(t), \vec{e}\,\}$ – каноническая.

Аналогично проверяется, что в A^3 канонической для эники будет АСК $\{M(t);\ \vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t), \vec{e}\,\}$, где $\vec{e} = \vec{r}\,'''(t) = (0,0,1)$. Докажем, что $I_n = \{M(t);\ \vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t), \dots, \vec{r}^{\,(n-1)}(t), \vec{r}^{(n)}(t)\}$ – каноническая АСК в A^n для эники γ_n, задаваемой в некоторой АСК формулами (3) или (4). (Входящие в АСК векторы линейно независимы). Применим индукцию по размерности пространства. Так как $\vec{r}^{(i)}(t) = \left(0, \dots, 0, 1, t, \frac{t^2}{2!}, \dots, \frac{t^{n-i}}{(n-i)!}\right)$, $i = 1, \dots, n$, (1 стоит на i-ом месте), то формулы преобразования координат при переходе к АСК I_n будут иметь вид:

$$x_1 = \tilde{x}_1 + t$$
$$x_2 = t\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \frac{t^2}{2!}$$
$$x_3 = \frac{t^2}{2!}\tilde{x}_1 + t\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 + \frac{t^3}{3!}$$

…………………………………..

$$x_{n-1} = \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\tilde{x}_1 + \frac{t^{n-3}}{(n-3)!}\tilde{x}_2 + \dots + \tilde{x}_{n-1} + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$x_n = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\tilde{x}_1 + \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\tilde{x}_2 + \dots + t\tilde{x}_{n-1} + \tilde{x}_n + \frac{t^n}{n!},$$

где $(x_1, x_2, ..., x_n)$ – координаты точки в старой (канонической) АСК, а $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)$ – координаты той же точки в новой АСК I_n. Заметим, что первые $n-1$ формул имеют тот же вид, что и формулы преобразования при переходе от усечённой старой АСК $\{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}\}$ к АСК $I_{n-1} = \{M(t); \vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t), \dots, \vec{r}^{\,(n-1)}(t)\}$ в соприкасающейся гиперплоскости $\sigma^{n-1} = A^{n-1}$. Предположим, что при переходе к АСК I_{n-1} эника γ_{n-1} степени $n-1$ задаётся каноническими уравнениями. Это означает, что подстановка в (4) формул преобразования координат равносильными преобразованиями первых $n-1$ равенств системы приводит её к виду:

$$\tilde{x}_i = \frac{\tilde{x}_1^i}{i!},\ i = 2, \dots, n-1. \tag{5}$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\tilde{x}_1 + \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\tilde{x}_2 + \dots + t\tilde{x}_{n-1} + \tilde{x}_n + \frac{t^n}{n!} = \frac{(\tilde{x}_1 + t)^n}{n!}.$$

Подставляя в левую часть последнего равенства вместо $\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_{n-1}$ их выражения по формулам (5), получим:

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\tilde{x}_1 + \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\frac{\tilde{x}_1^2}{2!} + \dots + \frac{t\tilde{x}_1^{n-1}}{(n-1)!} + \tilde{x}_n + \frac{t^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^{n-i}}{(n-i)!}\frac{\tilde{x}_1^i}{i!} + \tilde{x}_n.$$

Разлагая правую часть того же равенства по биному Ньютона, будем иметь:

$$\frac{(\tilde{x}_1 + t)^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{C_i^n}{n!} t^{n-i}\tilde{x}_1^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{t^{n-i}}{(n-i)!}\frac{{\tilde{x}_1}^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^{n-i}}{(n-i)!}\frac{{\tilde{x}_1}^i}{i!} + \frac{{\tilde{x}_1}^n}{n!}.$$

Сравнивая получившиеся выражения, приходим к равенству $\tilde{x}_n = \frac{{\tilde{x}_1}^n}{n!}$, которое вместе с формулами (5) представляет каноническое задание эники. Следовательно АСК I_n – каноническая. Теорема доказана.

Теорема 3. *Существует бесконечное множество канонических АСК с началом в произвольной точке эники. Если* $I = \{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ и $II = \{O; \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ *– две канонические АСК, то найдётся действительное число* μ *такое, что* $\vec{a}_i = \mu^i\, \vec{e}_i$, $i = 1, \dots, n$, *а параметры* u *и* v *соответственно первой и второй канонических параметризаций связаны соотношением:* $u = \mu v$.

Доказательство. Пусть $I = \{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ и $II = \{O; \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ – две канонические АСК для эники γ_n, в которых она задаётся параметризациями (3) и $\vec{\rho} = \left(v, \frac{v^2}{2!}, \frac{v^3}{3!}, \dots, \frac{v^n}{n!}\right)$, $v \in J$, соответственно. По теореме 0 асимптотическое направление эники определяется геометрически и совпадает с направлением оси O_{x_n} при задании линии параметризацией (1), а, значит, и канонической параметризацией. Поэтому найдётся действительное число λ такое, что $\vec{a}_n = \lambda\vec{e}_n$. Общему началу координат O в обеих параметризациях соответствуют значения параметров $u = v = 0$. Векторы $\vec{r}^{\,(i)}(0)$, $i = 1, \dots, n-1$, совпадают с базисными векторами первой АСК, а векторы $\vec{\rho}^{\,(i)}(0)$, $i = 1, \dots, n-1$, совпадают с базисными векторами второй АСК, и те и другие лежат в соприкасающейся гиперплоскости σ^{n-1} эники в точке O. Проекция эники γ_n на гиперплос-кость σ^{n-1} вдоль асимптотического направления есть эника γ_{n-1} , задаваемая в АСК I и II параметризациями: $\vec{r} = \left(u, \frac{u^2}{2!}, \frac{u^3}{3!}, \dots, \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}, 0\right)$, $u \in I$, и $\vec{\rho} = \left(v, \frac{v^2}{2!}, \frac{v^3}{3!}, \dots, \frac{v^{n-1}}{(n-1)!}, 0\right)$, $v \in J$, соответственно. Пусть M – точка эники, соответствующая параметру v в АСК II, N – её проекция на σ^{n-1} вдоль асимптотического направления. Пусть u – параметр той же точки M в первой параметризации, рассматриваемый как функция от v. Имеем: $\overrightarrow{NM} = \frac{u^n}{n!}\vec{e}_n = \frac{v^n}{n!}\vec{a}_n$. Тогда $\frac{u^n}{n!}\vec{e}_n = \frac{v^n}{n!}\lambda\vec{e}_n$. Следовательно,

$$u = \lambda^{\frac{1}{n}}v. \qquad (6)$$

Повторяя рассуждения для γ_{n-1}, придём к выводу, что $\vec{a}_{n-1} = \lambda_{n-1}\vec{e}_{n-1}$ для некоторого действительного числа λ_{n-1} и $\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\vec{e}_{n-1} = \frac{v^{n-1}}{(n-1)!}\vec{a}_{n-1}$. С учётом (6), получим: $\frac{(\lambda^{\frac{1}{n}}v)^{n-1}}{(n-1)!}\vec{e}_{n-1} = \frac{v^{n-1}}{(n-1)!}\lambda_{n-1}\vec{e}_{n-1} \implies \lambda_{n-1} = \lambda^{\frac{n-1}{n}} \implies \vec{a}_{n-1} = \lambda^{\frac{n-1}{n}}\vec{e}_{n-1}$. Аналогично убеждаемся, что $\vec{a}_i = \lambda^{\frac{i}{n}}\vec{e}_i$. Обозначим
$\mu = \lambda^{\frac{1}{n}}$. Тогда $u = \mu v$, $\vec{a}_i = \mu^i\vec{e}_i$.Теорема доказана.

Следствие 1. *Если фиксировать во всех канонических АСК последний вектор, то для каждой точки существует единственная каноническая АСК с началом в этой точке.*

Следствие 2. *В случае задания эники γ_n формулами (3) АСК $I_n = \{M(t);\ \vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t), \dots, \vec{r}^{(n)}(t)\}$ – каноническая, непрерывно меняющаяся от точки к точке.*

Следствие 3. $(n-k)$*-мерные плоскости в A^n, параллельные координатной плоскости $O_{x_{k+1}\dots x_n}$ канонической АСК эники γ_n, пересекают γ_n не более чем в одной точке.*

Из теоремы 3 вырисовывается следующий *геометрический смысл канонической АСК $O_{x_1\dots x_n}$*: ось O_{x_1} является касательной к энике в точке O, ось O_{x_n} является прямой асимптотического направления для эники γ_n, ось O_{x_k} является прямой асимптотического направления для проекции эники γ_n на k-ую соприкасающуюся плоскость в точке O вдоль координатной плоскости $O_{x_{k+1} \dots x_n}$ при $k = 2, \dots, n-1$. Заметим, что, как следует из [4, pr. 6.1], определённый выше канонический базис совпадает с экви-аффинным базисом, предложенным D. Davis для изучения аффинных кривых.

Библиографический список

1. Поликанова И.В. Об аффинной эквивалентности параболических дуг // Сборник научных статей международной конференции «Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования», Барнаул, 11–14 ноября, 2014 – Барнаул, – С. 344–346.

2. Поликанова И.В. О линиях в n-мерном аффинном пространстве с аффинно-эквивалентными дугами // МАК-2015: «Математики – Алтайскому краю»: сборник трудов всероссийской конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2015.– С. 34–38.

3. Поликанова И.В. Асимптотическое направление эники // Научное электронное издание: Сборник научных статей международной конференции «Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования» – 2017. Барнаул, 14-17 ноября, – 2017. – С. 317–320.

4. Davis D. Generic affine differential geometry of curves in R^n // Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A, – 2006. – P. 1195–1205.

УДК 514.752

О восстановления поверхности по заданной сумме главных радиусов кривизны

Т.Д. Туканаев
ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, г. Астана

Введем в пространстве E^{n+1} прямоугольную декартову систему координат $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$. Пусть S^n – единичная n-мерная сфера в E^{n+1}, центр которой совпадает с началом координат. Полусферу, соответствующую $x_{n+1} > 0$, обозначим S_+^n. Спроектируем координатную сеть $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на плоскости $E^n : x_{n+1} = 1$ на полусферу S_+^n, получим координатную сеть $(u_1, u_2, \dots, u_n)$.